

IV 水理学の基礎としてのナビエ=ストークスの運動方程式の誘導とフロック状粒子に作用する力の解析 (流体力学・水理学の基礎 (I) 前半 (2020.12.20))

1. 水理学を学ぶに当たって

1.1 質点の力学から連続体の力学へ

1) 2.1 質点の力学

高等学校などで学ぶ力学の分野では、質量 (存在している物質の量を表す概念。重量質量と慣性質量が定義されている。) は持つが、大きさは持たない点として表される理想的な存在を質点として定義し、その運動のメカニズムを解析し理論的展開が説明されてきた。見かけ上は、宇宙空間の天体、野球のボール、小さな鉄の小球、ガラスのビー玉等を想定しながら、理論上は大きさのない点だけである質点に作用する力と質点の運動の関係を質点の力学として解析してきた。

質点の力学においては、ニュートン力学の基本となる運動の 3 法則が成立するとして説明されている。運動の 3 法則は、「慣性の法則」「運動方程式」「作用・反作用の法則」として知られているが、運動を記述する基本的な関係としては、運動方程式による記述が基本となるので、運動方程式の定義について解説する。

質点の運動方程式は質点の運動を追跡して記述する形となり、次のような物理量とその関係として記述される。

- ① 質点の質量 : m
- ② 質点の移動距離 (運動の軌跡として) : x
- ③ 時間 : t
- ④ 質点の速度 : $v = dx/dt$ (等速運動においては v は一定)
- ⑤ 質点の加速度 : $a = dv/dt$ (等速運動においては $a = 0$)
- ⑥ 質点に働く力 (外力) : F
- ⑦ 質点にかかわる基本的な運動方程式は外力が慣性力と釣り合う関係として定義される : $a \cdot m = F$

2) 連続体の力学

前節においては、質点の力学の定義を行った。質点はある意味で実在しない理想的な物体であるが、実際の物体は水や大気の流れにあっても、建造物の構造体となる鋼材やコンクリートなどの構造材料にあっても、それらは塊として大きさをもち、決して質点として扱うことのできるものではない。また、それらの物体はその物体を構成する分子あるいは微細な物質のレベルで連続しており、質点とは全く異なる内部レベルでの相互関係に依存する物体となっており、質点としての力学の系とは異なる扱いが必要となる。このような内部構造が連続する連続体にかかわる力学の関係においては、連続体を構成する物質の内部での力の

伝達のメカニズムが重要な対象となる。

土木の分野において扱う力学の主要な分野は、水を対象とする流体力学の一分野である水理学の分野と鉄鋼やコンクリート等の構造部材の力学を扱う材料力学の分野となる。これらの力学は連続体の力学として総称することができる。連続体を流体（特にニュートン流体と仮定できる水）として扱うのが水理学であり、連続体を弾性体（弾性変形する材料）として扱うのが材料力学となる。繰り返しになるが、力を加えたときに流動変形をする物体は流体であり、弾性変形する物体は弾性体となる。もちろん、鋼鉄やコンクリートの構造部材は、弾性変形を越えるような復元が不可能な変形（塑性変形）をする場合は、通常材料力学の適応範囲外となる。大きな荷重をきわめてゆっくりした速度で長時間かけ続けるような場合には、コンクリート部材におけるクリープ現象と呼ばれる不可逆な変形を生じる。

このように土木の分野で扱う連続体の力学においては、物体の内部での力と変形の間をいかに記述するかによって、水理学と材料力学として大別して解析される。質点の力学とは表示の方法は大きく異なるのではあるが、質量の概念、速度の概念、加速度の概念、外力の概念などはニュートン力学の法則あるいは概念を援用することで現象の説明、解析が進められる。その意味では質点の力学に基礎を置きながらも、力と変形の関係においては、異なる構造の運動を解析するものとなる。

1.2 数式展開上の基礎

1) テーラー展開による近似式の表示

変数 x の関数を $f(x)$ とするとき、 $x = a$ 付近の $f(x)$ は、次のテーラー級数によって表示される。

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n \quad (1)$$

このとき、 x が a に極めて近い付近では、すなわち $x - a = \delta x$ は極めて小さい値となり、 δx の 2 乗以上の高次の項は事実上 0 とみなせる微小数値として評価できる。このような場合には、テーラー展開における $n=2$ 以上の高次の項は事実上無視できるので、 $n=0$ と $n=1$ のレベルの項を評価すればよいことになる。 $f(x)$ の a に極めて近い範囲での値は 1 次近似式として次のように示される、

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) \quad (2)$$

但し、 $f'(a)$ は関数 $f(x)$ の a における 1 次微分の微係数の値（定数）となり、 $x = a$ における接線の勾配を定めるものとなる。式 (2) の関係は図—1 として示される。

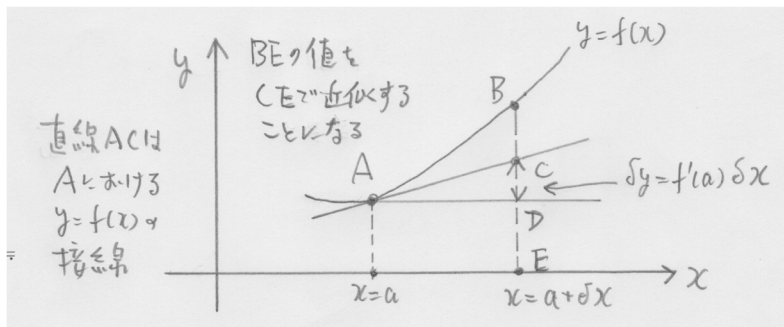


図-1 テーラー展開による1次近似

このことは、 x が a の付近にある場合は $f(x)$ の値は、 $f(a)$ の値に $x=a$ における接線の勾配によって定まる直線近似とし、 $x-a=\delta x$ の微小区間へ対応する値の和として評価されることを示している。一方、特に $f(x)$ と $f(a)$ との差が問題となる場合には、 $\delta x = x-a$ とし、

$$\delta f = f(x) - f(a) \cong \delta y = f'(a)\delta x \quad (3)$$

と表示され、 $f'(a)$ は定数となるので微小区間に対する直線近似として評価される。このとき、 $f(x)$ は式 (4) に示されるように δx に関する一次近似式として示される。

$$f(x) \cong f(a) + f'(a)\delta x \quad (4)$$

結論としては、図-1 において点 B を点 C で近似することを意味している。

2) オイラーの表記法による物理量（速度、変形、回転、加速度、応力）の空間的、時間的变化の表示

i) オイラーの方法による微小直方体の表示

オイラーの表記法による物理量（速度、変形、回転、加速度、応力）の空間的表示は、直行する x 、 y 、 z 軸上の位置 (x,y,z) と時間 t の関数として表される。特に実在の流体や弾性体の力学においては、流体粒子とも呼ばれる微小な直方体を想定し、その直方体にかかわる力と変形の間を記述することが必要となる。以下には、微小直方体の座標の決め方、速度、変形、回転、加速度、応力の記述の仕方を説明する。

3次元の直行座標軸によって表示される点 A の座標 (x,y,z) を起点として、辺の大きさをそれぞれ δx 、 δy 、 δz とする微小直方体は図-2 のように表示される。このとき微小直方体の A から H までの8個の頂点の位置は次のように示される。点 $A(x,y,z)$ 、点 $B(x+\delta x,y,z)$ 、点 $C(x+\delta x,y+\delta y,z)$ 、点 $D(x,y+\delta y,z)$ 、点 $E(x,y,z+\delta z)$ 、点 $F(x+\delta x,y,z+\delta z)$ 、点 $G(x+\delta x,y+\delta y,z+\delta z)$ 、点 $H(x,y+\delta y,z+\delta z)$ と示される8つの点からなる微小直方体として表示されることになる。

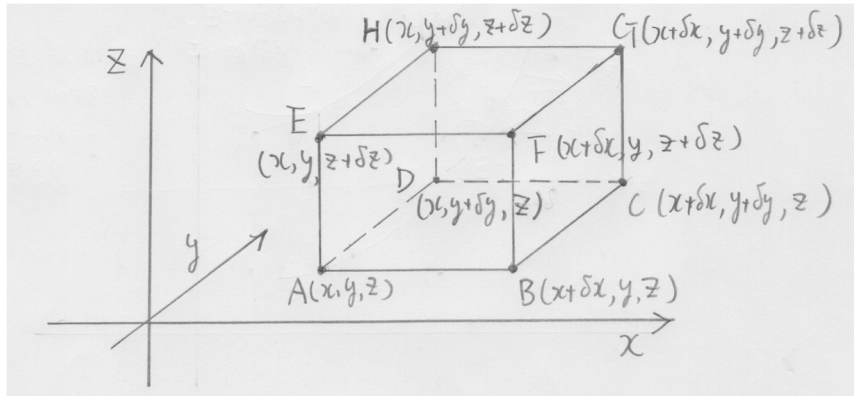


図-2 オイラーの方法による座標軸と微小直方体の表示

ii) オイラーの方法による速度、変形、回転の表示

オイラーの表記法においては、点 $P(x,y,z)$ 、時間 t における各座標軸方向の速度の成分 (u,v,w) は空間的な位置 (x,y,z) と時間 (t) の関数として表示される。 δt 時間経過後には点 $P'(x+u \delta t, y+v \delta t, z+w \delta t)$ へ移動しているとして記述され、この δt 時間の間の速度の変化率は加速度として評価される。

図の表示を簡単にするために、2次元の関係として示すと、図-3 に示す微小長方形 $ABCD$ の各頂点の示す x 方向、 y 方向の速度成分は、1次近似の関係として以下のように記述される。

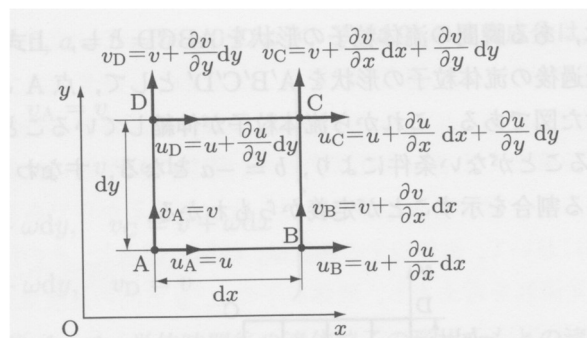


図-3 微小長方形 $ABCD$ の各頂点における x 方向、 y 方向の速度の表示 (藤田勝久「基本を学ぶ流体力学」より)

微小長方形の点 $A(x,y)$ における速度の成分を (u,v) とするとき、各頂点 A, B, C, D における速度の成分は、次のように表すことができる。

点 A の速度成分 (u, v)

点 B の速度成分 $(u + \frac{\partial u}{\partial x} \delta x, v + \frac{\partial v}{\partial x} \delta x)$

点 C の速度成分 $(u + \frac{\partial u}{\partial x} \delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \delta y, v + \frac{\partial v}{\partial x} \delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \delta y)$

点 D の速度成分 $(u + \frac{\partial u}{\partial y} \delta y, v + \frac{\partial v}{\partial y} \delta y)$

また、点 C の速度成分は、x 方向の速度成分に対して、 $\frac{\partial v}{\partial x}$ を加えて、かつ減ずる操作を加えると次のように書き換えることができる。

$$u + \frac{\partial u}{\partial x} \delta x + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) \delta y - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \delta y$$

同じく y 方向の速度成分に対して、 $\frac{\partial u}{\partial y}$ を加えて、かつ減ずると次のように変形される。

$$v + \frac{\partial v}{\partial y} \delta y + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) \delta x - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) \delta x$$

ここで、

$$\alpha = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad b = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad h = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right), \quad \omega = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

h、 ω は図-4 に示される伸び縮みの変形、剪断変形、回転の要素を示していることが分かる。

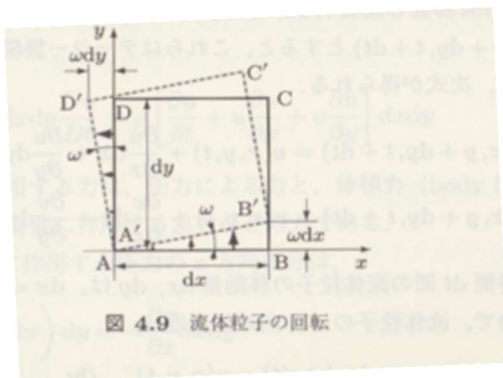
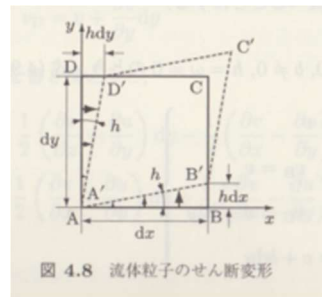
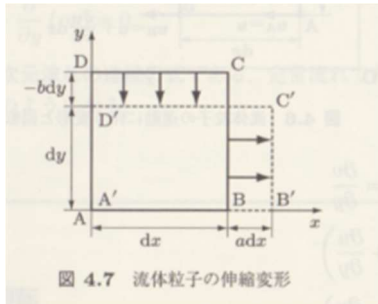


図-4 微小直方体を 2 次元に投影した xy 面が示す変位を生起する速度変化の表示 (藤田勝久「基本を学ぶ流体力学」より)

ここで、長方形 ABCD にかかわる質量と密度が変わらないような流体 (非圧縮性の流体)

の場合には、 $a+b=0$ となる。この $a+b = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ の関係は非圧縮性流体の連続の条件と言われる。

また、 \mathbf{h} は剪断変形の成分であり、 ω は回転の成分となる。このように空間的な速度の変化の中に、微小直方体の変形の要素と回転の要素が示されていることは重要な点である。

これまでの 2 次元での表記を 3 次元に展開すると、テンソルの表示を取り入れ、式(6)のように示される。

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) & 0 & -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) \\ -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) & 0 \end{bmatrix} \quad (6)
 \end{aligned}$$

式(6)は小川浩平編集「①流体移動解析」朝倉書店(2011年) p.8 より引用している。

本論との関係で表示を修正して示せば、 $u_x = u$ $u_y = v$ $u_z = w$ となる。また、式(6)の右辺第1項は伸び縮み変形、剪断変形を示す項となり第2項は回転を示す項となる。

iii) オイラーの方法による加速度の表示

まず 1 次元的な x 軸上の運動を考えれば、 δt 時間当たりの速度の変化率は、 x 方向の加速度成分を表わすことになる。 δt 時間に進む距離 δx は $\delta x = u \delta t$ となるので、微小時間内の空間的な速度の変化は式(7)として表示される。さらに速度 u は時間の関数でもあるので、その時間的な変化の項を加えた総括的な加速度の表示は式(8)として表示される。

$$\delta u = \frac{\partial u}{\partial x} \delta x = \frac{\partial u}{\partial x} u \delta t \quad (7)$$

$$\alpha_x = u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} \quad (8)$$

しかし、一般的には x 軸上の運動だけではないので、3次元的な表示の中では、 x 方向の速度 u は y 、 z 方向への変化を加味する必要があり、式 (8) に y 、 z 方向の変化量を加えた速度変化の項を加える必要がある。このとき、 x 方向の単位時間当たりの速度の変化率である加速度成分は式 (9-1) として表示されることになる。

$$\alpha_x = u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t} \quad (9-1)$$

同様に、 y 方向、 z 方向についても式(9-1)、式(9-2)のように表示することができる。

$$\alpha_y = u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial t} \quad (9-2)$$

$$\alpha_z = u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t} \quad (9-3)$$

また、式 (9) において、式 (10) のような実質微分の演算子を定義すれば、式 (9) は式 (11) として表示することができる。定性的には、速度を時間で微分すると加速度になるという意味では、質点の力学と同じ表現となるが、その物理的な意味、内容は異なる点には十分注意が必要である。

$$\frac{D}{Dt} = u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial t} \quad (10)$$

$$\alpha_x = \frac{Du}{Dt} \quad (11-1)$$

$$\alpha_y = \frac{Dv}{Dt} \quad (11-2)$$

$$\alpha_z = \frac{Dw}{Dt} \quad (11-3)$$

iv) オイラーの方法による微小直方体の表面に作用する応力の表示

微小直方体に作用する力の要素は、微小直方体の質量にかかわる力と微小直方体の 8 つの面に作用する表面力とに分けられる。質量に作用する力は、微小体積 $\delta x \delta y \delta z$ に密度を掛けた質量 ($\rho \delta x \delta y \delta z$) にかかわる力 (質量力) となる。一方表面に作用する力は、各表面の面積当たりの力となり、応力と呼ばれる。応力の表示は、面に直行する垂直成分と面に沿う (面をこする) ように作用する成分に分けられる。ここで、考える面の向きを各座標軸の正の向きにとると、図 - 5 のように示される。

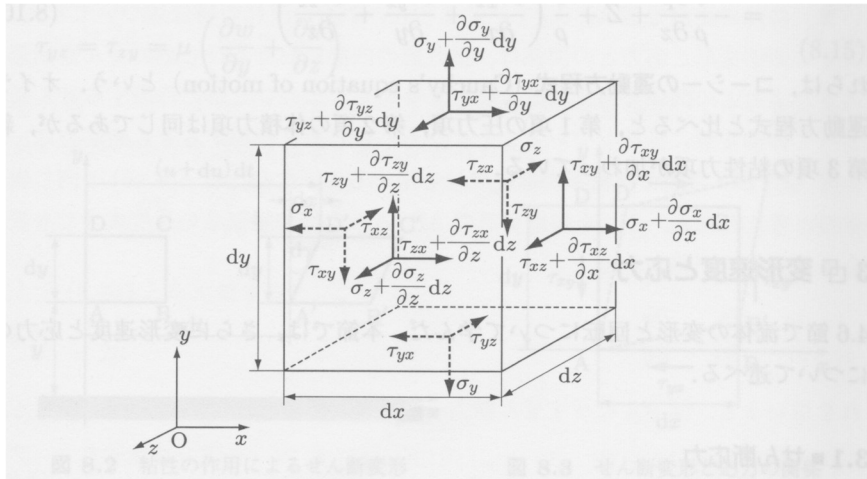


図-5 微小直方体の各表面に作用する応力の表示（座標軸の取り方は、図-2 とは異なり x 軸周りに y 軸、z 軸を 90° 回転している）（藤田勝久「基本を学ぶ流体力学」より）

微小直方体の各面に作用する応力の表示は、面の向かう方向を基準として、面に垂直に外側に向かう成分（水直応力）をプラスとして表し、面に沿うの応力は面の方向と直行する 2 つの軸の方向への応力（剪断応力）として表示される。例えば、x 軸方向の面 BCGF に作用する応力は、垂直応力（ σ_{xx} ）、剪断応力（ τ_{xy} 、 τ_{xz} ）となる。3 次元に展開した際の応力の関係は式(12)に示されるテンソルとして表示される。

$$\begin{array}{ccc}
 \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\
 \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\
 \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz}
 \end{array} \quad (12)$$

ここで、 σ_{xx} 、 σ_{yy} 、 σ_{zz} の成分は、面に垂直に作用する成分となり、伸び縮みの変形を生じさせる応力となる。このような面に垂直な成分の例は流体に作用する流体圧（水圧）や流れが狭窄部へ押し込まれ加速するような場合に生じることになる。ただし、流体圧は等方的なものとなるので、流体圧を受けても密度の変わらないような物体では伸び縮みの変形は起こらない。一方、 τ_{xy} 、 τ_{yx} 、 τ_{xz} 、 τ_{zx} 、 τ_{yz} 、 τ_{zy} の成分は、面をこするような剪断応力を表わす要素となる。 τ_{xy} と τ_{yx} の関係については次のような解析がされる。

応力 τ_{xy} が働く微小表面に作用する剪断力は、応力に面積を掛けた大きさ $\tau_{xy} \delta y \delta z$ となる。この剪断力は面の向きが x 軸に直交する微小表面に作用することになり、z 軸方向を軸とする回転モーメント、 $\tau_{xy} \delta x \delta y \delta z$ を生じる。同様に、y 軸に直交する微小表面にも z 軸周りの回転モーメント、 $\tau_{yx} \delta x \delta y \delta z$ を生じる。この二つの回転モーメントの差は、微小直方体の z 軸周りの慣性モーメントと角速度の積と釣り合うことになる。この回転運動に対しては次に示す式(13)の関係として示される。（小川浩平「流体移動解析」朝倉書店、P6）

$$\text{力の回転モーメント} = (\tau_{xy} - \tau_{yx}) \delta x \delta y \delta z \quad (\text{微小距離 } \delta x \text{ の 3 乗のオーダー}) = (z \text{ 軸}$$

の周りの微小直方体の慣性モーメント) × (角加速度) = ((微小直方体の質量 ($\rho \delta x \delta y \delta z$)) × (z 軸との距離の 2 乗 (例えば $\delta x/2$ の 2 乗)) × (各加速度 ($d\omega/dt$))) = (微小距離 δx の 5 乗のオーダー) × ($d\omega/dt$) (13)

このとき、式 (13) の右辺は微小距離の 5 乗のオーダーの大きさとなる。一方、左辺は 3 乗のオーダーの大きさとなるので、右辺側ははるかに小さなオーダーの値となり、事実上ゼロとして扱うことができる。この結果式 (13) は、 $\tau_{xy} - \tau_{yx} = 0$ となる。この関係は、3 つの軸の周りにおいて成立するので、 $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ 、 $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ 、 $\tau_{zx} = \tau_{xz}$ の関係となり、応力のテンソルは対称テンソルとなることが分かる。(注：小川浩平「流体移動解析」朝倉書店、p.5-6)

このとき、x、y、z 軸方向への表面力の実質的な大きさは、式 (14) のように示される。

$$\text{x 方向の表面力の 1 次近似としての変化差分：} \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) \delta x \delta y \delta z \quad (14-1)$$

$$\text{y 方向の表面力の 1 次近似としての変化差分：} \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) \delta x \delta y \delta z \quad (14-2)$$

$$\text{z 方向の表面力の 1 次近似としての変化差分：} \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right) \delta x \delta y \delta z \quad (14-3)$$

このとき、 σ_{xx} 、 σ_{yy} 、 σ_{zz} は各微小表面に垂直に作用する応力成分を表わしているが、その表面の存在する場所で $-p$ として表示される流体圧 (水を対象とする場合には水圧であり、面を押し込むような方向に働くので符号にはマイナスをつけている) と運動に伴う伸び縮みに対応する垂直応力成分 (τ_{xx} 、 τ_{yy} 、 τ_{zz}) の和として、式-15 のように示される。なお、流体圧は表面の向きによらず等方的となる。

$$\sigma_{xx} = -p + \tau_{xx} \quad (15-1)$$

$$\sigma_{yy} = -p + \tau_{yy} \quad (15-2)$$

$$\sigma_{zz} = -p + \tau_{zz} \quad (15-3)$$

また、運動に伴う垂直応力、剪断応力は粘性を有する流体の変形によって生じる要素となるので、粘性の無い完全流体においては、変形に伴う垂直応力、剪断応力は発生しない。また、回転運動の内部は剛体的な運動となり、微小直方体には変形は生じないので、表面に作用する応力を生ずることはない。したがって、伸び縮みの変形及び剪断変形に対応する微小表面に作用する各応力は流体の粘性によって定まる関係となる。粘性を持つ流体についての変形と応力の関係は、2.2 節において説明されるが、水理学はニュートン流体とされる水の力学を解析する分野となる。

2. 連続体の力学の展開

2.1 連続体の力学の基本構造

連続体の力学は流体にせよ弾性体にせよ、連続体の中に微小直方体を想定し、その表面に働く力と変形の間を定式化することから始まる。その際想定する微小直方体は図—2に示される微小直方体を想定することになる。

また、微小直方体の6面の表面には、図—5に示した応力と呼ばれる面積あたりに働く力が働き、その応力に対応して微小直方体の内部に伸び縮みや剪断変形あるいは回転が生ずることを想定することになる。すでに述べた通り、応力は面をこするよう働く剪断応力と面に垂直に働く垂直応力の成分に分けられる。これらの力(応力)は6つの面にそれぞれ作用するが、相対する面では方向が異なるだけであるので、有効な成分は3つの面に作用する9つの成分となり、応力はテンソル量として式(12)として表示される。

微小直方体の体積 $\delta x \delta y \delta z$ に密度 ρ を掛けた質量の物体が、その物体の存在する場所(点 $A(x,y,z)$ を代表として表示する)における x,y,z 方向の速度を u,v,w とすると、各方向の加速度は、すでに示した通り式(9)として示される。このとき、微小直方体へ作用する力は、微小直方体の質量に作用する外力 (F_x, F_y, F_z) と微小直方体の表面に作用する表面力(応力の各成分に微小面積を掛けた大きさの力)となり、その微小直方体の運動を記述する運動方程式は式(16)のように定式化される。なお、ここに示される運動方程式は、質点の力学における運動方程式と同等の関係式となる。

$$\rho \delta x \delta y \delta z \times \alpha_x = \rho \delta x \delta y \delta z \times F_x + \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) \delta x \delta y \delta z \quad (16-1)$$

$$\rho \delta x \delta y \delta z \times \alpha_y = \rho \delta x \delta y \delta z \times F_y + \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) \delta x \delta y \delta z \quad (16-2)$$

$$\rho \delta x \delta y \delta z \times \alpha_z = \rho \delta x \delta y \delta z \times F_z + \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right) \delta x \delta y \delta z \quad (16-3)$$

ここで、両辺を $\delta x \delta y \delta z$ で割り、さらに流体圧の項を分離して示せば、式(17)の関係式が求められる。

$$\rho \alpha_x = \rho F_x + \left(-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) \quad (17-1)$$

$$\rho \alpha_y = \rho F_y + \left(-\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) \quad (17-2)$$

$$\rho \alpha_z = \rho F_z + \left(-\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) \quad (17-3)$$

このとき、注意しなければならないポイントは、繰り返しになるが、考えている連続体の中の微小直方体の運動に関する物理量は、空間的な位置と時間の関数として表示するオイラーの表記法によって表示されることである。

2.2 連続体にかかわる力学的特性：ニュートン流体の定義

連続体として扱われる物体には、力と変形の関係の特徴的なモデル化が行われる。2.2の説明と重複するところとなるが、材料力学においては弾性体を仮定して構成され力と変形（主として伸び、縮み）の関係を定式化するモデルで説明されるが、流体力学では力と変形の関係はいくつかのモデルとして表示される。弾性体については、バネばかりの例が示され、力に比例する伸びが生じ、力と伸びの関係を定める特性は弾性係数によって表示される。弾性係数は材料によって異なるが、弾性係数が一定値を持つ範囲で、力と変形の間を解析する力学が材料力学となる。

一方、流体に関する力と変形の関係は、面をこするような剪断応力と滑るようなずれの変形との関係を求めるものとなり、図-6に示されるように5つのモデルによってモデル化される。ただし、流体として水や空気を扱う分野では、粘性係数を一定とするニュートン流体としての解析を行うことになり、粘性係数がゼロと仮定できるような流体（そのような力と変形の間を解析する流体運動を含めて）は完全流体としての解析を行うことになる。

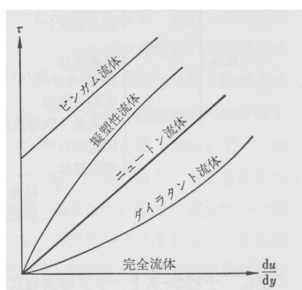


図-6 変形速度（速度勾配 (du/dy)）と剪断応力 (τ) の関係（日野幹雄「流体力学」朝倉書店）

図-6に示されるビンガム流体、擬塑性流体、ダイラタント流体は非ニュートン流体と総称されるがここでは簡単な説明にとどめる。ビンガム流体は固形物を含む汚泥の流動に際して現れる現象であり、ある力以上になるとそれまでは固体として固い状態であった物体が急に水と同じニュートン流体としての運動を行う流体である。擬塑性流体は力を加えると動きにくくなる固形物が次第に詰まっていくような流体であり、ダイラタント流体は力を加えると流動性が増すマヨネーズのような流体である。ニュートン流体は変形速度（速度勾配 (du/dy)）と剪断応力は原点を通る直線比例関係となり、その比例定数がその流体の粘性係数となる流動特性を持つ流体として定義される。

もう一つ注意しなければならない流体の持つ特性として、流体の持つ圧縮性にかかわる特性がある。水はその弾性変形を考えなければならないような場合（衝撃波の影響が無視できないような運動の場合）を除いた通常の運動においては、表面に垂直に作用する圧力を受けても体積を変えない非圧縮性の流体として扱われる。空気のような気体の流体は圧力を加えると体積が変化するので圧縮性の流体となる。したがって、非圧縮性の流体にあつてはその流体の密度は圧力によつては変わらないが、圧縮性の流体にあつては流体の密度は圧力によつて変化することになる。もちろん温度の変化、塩分濃度の変化に対しては流体の

密度は変わるが、温度、濃度が一定であれば圧縮性はゼロである。完全流体は粘性もゼロであり圧縮性もゼロである理想的な流体をモデル化するものとなる。

このとき、ニュートン流体は図-7 に示されるような流速分布が直線になるようなクエット流を仮定した流れの状態に対して、速度ゼロとなる下底部に働く応力（剪断応力）と変形速度の関係は式（18）のように定義される。ここに、 μ は粘性係数と呼ばれる。

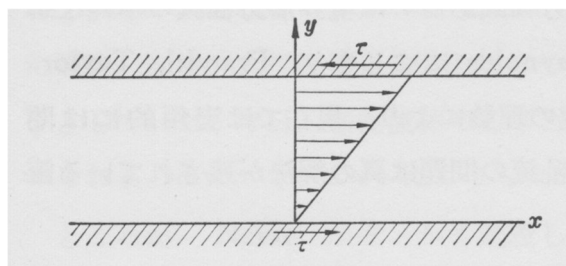


図-7 2平行平板間のクエット流の流速分布と平行平板に働く応力（式（18）
（日野幹雄「流体力学」朝倉書店）

$$\tau = \mu \left(\frac{du}{dy} \right)_{y=0} \quad (18)$$

また、式（6）に示された微小直方体の変形速度と式（12）に示される応力のテンソルとの関係は改めて、2.5節において説明する。

2.3 完全流体にかかわるオイラーの運動方程式

完全流体にかかわる運動方程式は、図-2 に示した微小直方体の運動として表すことができる。この微小直方体にかかわる力の関係は、一般形としては、式（17）として表されるが、完全流体においては、微小直方体の変形（空間的な速度差によって生ずる変形）による応力は働かないので、式（17）をさらに簡単化した式（19）として表すことができる。

$$\alpha_x = \frac{Du}{Dt} = F_x - \left(\frac{1}{\rho} \right) \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \quad (19-1)$$

$$\alpha_y = \frac{Dv}{Dt} = F_y - \left(\frac{1}{\rho} \right) \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right) \quad (19-2)$$

$$\alpha_z = \frac{Dw}{Dt} = F_z - \left(\frac{1}{\rho} \right) \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right) \quad (19-3)$$

式（18）は完全流体に関するオイラーの運動方程式と呼ばれる。

2.4 ニュートン流体の力学：ナビエ=ストークスの運動方程式

微小直方体となる流体にかかわる運動方程式は、式（17）に示されるが、応力と変形速度の関係にニュートン流体を仮定する運動方程式はナビエ=ストークスの運動方程式と呼ばれる。ナビエ=ストークスの運動方程式の特徴は、微小直方体の表面に作用する応力と微小

直方体の変形速度の関係に式 (18) に定義されるニュートン流体の関係を仮定するものとなる。

ニュートン流体の微小直方体に働く変形に伴う表面応力は、粘性に起因する応力であり、完全流体や回転運動の中では生じないものである。従って、式 (15) の関係を式 (14) に代入して、運動にかかわる応力を取り出した応力のテンソルは式 (20) と示される。

$$\begin{array}{ccc} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{array} \quad (20)$$

一方変形にかかわる、速度の空間的な変化のテンソルは、式 (6) 右辺第 1 項として表示される。

この表面応力のテンソルの剪断応力項と変形のテンソルの剪断変形項との関係は、式 (18) に示したニュートン流体の定義式との類推の上で、式 (21) のように示される。

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (21-1)$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (21-2)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (21-3)$$

一方伸び縮みの変形に対しては、圧縮性流体への評価も必要となり、垂直応力は式 (22) のように示される。(この関係の詳細は、藤田勝久「基礎を学ぶ流体力学」(森北出版) p.115-116 を参照されたい)

$$\tau_{xx} = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - (2/3)\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (22-1)$$

$$\tau_{yy} = 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} - (2/3)\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (22-2)$$

$$\tau_{zz} = 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} - (2/3)\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (22-3)$$

ただし、水のような非圧縮性流体においては質量保存則に基づく連続の条件として式 (23) の条件が適用される。

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0 \quad (23)$$

従って、水のようなニュートン流体として解析される非圧縮性流体の変形に伴う剪断応力と垂直応力は式 (24) として示される。

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (24-1)$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (24-2)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (24-3)$$

$$\tau_{xx} = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \quad (24-4)$$

$$\tau_{yy} = 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \quad (24-5)$$

$$\tau_{zz} = 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \quad (24-6)$$

ここで、式 (17) に式 (24) の関係を代入すると、ナビエ=ストークスの運動方程式が成立する。例えば、x 軸方向の運動方程式は、次のように求められる。

$$\begin{aligned} \rho \alpha_x &= \rho F_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right) \\ &= \rho F_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (25)$$

ここで、連続の条件より、 $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$ となるので、加速度 α_x に式 (9) を代入すれば、式 (25) はナビエ=ストークスの運動方程式として式 (26) と示される。

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t} = F_x - \left(\frac{1}{\rho} \right) \frac{\partial p}{\partial x} + \left(\frac{\mu}{\rho} \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (26)$$

y、z 方向にも同様の関係式が成立することになる。

ここに求めた、ナビエ=ストークスの運動方程式は、微小直方体の表面にニュートン流体の特性として生じる垂直応力、剪断応力を受けて、微小直方体が運動をしていく様子とも説明できる。式 (26) の左辺の項は慣性項となり、右辺は第 1 項は重力等の外力による質量力、第 2 項は流体圧による圧力項、第 3 項は粘性項と呼ばれる。

2.5 ナビエ=ストークスの運動方程式の乱流条件への展開：レイノズル方程式の誘導

乱流状態は、流速がランダムな変化を伴う流動状態となることを考えるものである。このランダムな速度変動が生じる原因は、ナビエ=ストークスの運動方程式に含まれている非線形項に由来する変動となる。この問題は、流れの安定性の議論として、乱流理論の基本となるものであるが、ここでは平均速度とランダム成分が重なる速度変動をする流れの状態を乱流として扱うことにとどめる。このとき、流速の経時的な変動を平均流とランダム成分に分けて流速を表わすことになる。x、y、z 方向の速度成分 u、v、w は、その時間平均値とランダムな変動部分に分けて式 (27) のように表示される

$$u = U + u' \quad (27-1)$$

但し、 u の時間平均値は $\bar{u} = U$ となり、 u' の時間平均値は $\bar{u}' = 0$ となる。 v 、 w については同様に表記される。

$$v = V + v' \quad (27-2)$$

$$w = W + w' \quad (27-3)$$

$$p = \bar{p} + p' \quad (27-4)$$

ここで、式 (26) の各項の時間平均を取ると、次のような関係が得られる。

$$\overline{(p + p')} = \bar{p} \quad \sim$$

$$\overline{(U + u')} = U$$

$(U + u')^2 = U^2 + 2Uu' + u'^2$ において、両辺の時間平均を取れば、

$$\overline{(U + u')^2} = U^2 + \overline{u'^2}$$

$$\overline{(U + u')(V + v')} = \overline{(UV + Uv' + u'V + u'v')} = UV + \overline{u'v'}$$

このとき、式 (26) の主要な項の時間平均は次のように示される。(次の各式は左辺の時間平均を取ると右辺の項となることを示している。これは表示上のも問題で、上式においてはアンダーバーで示した記号が使われるべきであるが、ここでは省略している。

$$\overline{\partial(U + u')/\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x}$$

$$\overline{\partial(U + u')^2/\partial x} = \partial(U^2 + \overline{u'^2})/\partial x$$

$$\overline{\partial(U + u')(V + v')/\partial x} = \partial(UV + \overline{u'v'})/\partial x$$

$$\overline{\partial^2(U + u')/\partial x^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

また、式 (26) に示したナビエ=ストークス の運動方程式の両辺に $u(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z})$

を加える。実際は、非圧縮性の流体においては連続の条件 (質量保存則) より $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} +$

$\frac{\partial w}{\partial z} = 0$ となるので、両辺に 0 を加えることになり事実上の影響はない。ただし、この項

を加えることにより、式 (26) の左辺は、

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t} + u(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}) = \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} + \frac{\partial uw}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t}$$

と変形されて、速度を平均速度と変動速度の和として表し、時間平均を取れば式 (26) は式 (28) のように表すことができる。

$$(U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} + W \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial U}{\partial t}) + (\frac{\partial \overline{u'u'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z}) = F_x - \left(\frac{1}{\rho}\right) \frac{\partial p}{\partial x} +$$

$$\left(\frac{\mu}{\rho}\right) \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right) \quad (28)$$

式 (28) の左辺第 2 項は流速の変動成分による微小直方体の表面に作用する応力を評価

する項となり、レイノズル応力と呼ばれ粘性応力とともに表面に作用する力として評価される。繰り返しになるが、流れの中にある微小直方体の各表面には、粘性応力と流れの慣性力（加速度項）に起因するレイノズル応力を受けて運動する。このとき式 (28) は式 (29) として表され、レイノズル方程式と呼ばれる。

$$U \frac{\partial u}{\partial x} + V \frac{\partial u}{\partial y} + W \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t} = F_x - \left(\frac{1}{\rho} \right) \frac{\partial p}{\partial x} + \left(\frac{\mu}{\rho} \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) - \left(\frac{\partial \overline{u'u'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z} \right) \quad (29)$$

なお、レイノズル応力のうち $\frac{\partial \overline{u'u'}}{\partial x}$ は垂直応力、 $\frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y}$ と $\frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z}$ は剪断応力となる。

次に、ナビエ=ストークスの運動方程式 (式 (26) の慣性項 (式 (26) の左辺) と粘性項 (式 (26) の右辺第 3 項) の相対的な大きさの比較は、代表的な速度のオーダーとして U 、長さのオーダーとして L とするとき、次のように示される。

$$\text{慣性項のオーダーとしての大きさ} : u \frac{\partial u}{\partial x} = U^2/L$$

$$\text{粘性項のオーダーとしての大きさ} : \left(\frac{\mu}{\rho} \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) = \left(\frac{\mu}{\rho} \right) (U/L^2)$$

$$\text{Re} = (U^2/L) / \left(\frac{\mu}{\rho} \right) (U/L^2) = UL / (\mu / \rho) = UL / \nu$$

ここで、 Re : レイノズル数、 $\nu = (\mu / \rho)$: 動粘性係数

このとき、 Re 数が相対的に大きいときは、慣性項が卓越する影響を持つことになり、小さいときには粘性項が卓越する影響を持つ関係として力の関係が評価されることになる。また、乱流状態を想定するレイノズル方程式の形式においては、式 (29) の右辺第 4 項に示される変動流速に起因するレイノズル応力は慣性項の効果として評価されるものであり、第 3 項は粘性応力として評価されるものとなる。

従って、式 (29) においては Re 数が大きいときには、表面に働く応力の評価としては、第 4 項が支配的となり、小さいときには第 3 項が支配的となる関係として示される。 Re 数が小さく第 3 項が支配的な流れは層流となり、 Re 数が大きく第 4 項が支配的な流れは乱流となる。円形管を例とするような流れでは、代表的な流速となる断面平均流速を U とし、代表的な長さとして管径 L とするとき Re 数が 2,000 以下の場合には、染料を流した場合に流線が観察される層流となる。 Re 数が 2,000 を超えると染料などを流せば流線は観測されず、直ちに断面全体に拡散していく。このような状態は乱流と呼ばれる。乱流においては、流れと直行する管断面方向への変動流速成分が生じて、流れの様相が変わることが分かる。管内を流れる流速を上げていくと層流から乱流へ遷移していくことになり、この遷移を示す Re 数を限界レイノズル数と呼ぶ。限界レイノズル数の大きさは、観測している現象の代表的な流速の取り方、代表的な長さの取り方により絶対値は変わることになる。例えば、幅

の広い長方形断面と想定される河川等の開水路においては、水深を L とし断面平均流速を U とするとき限界レイノズル数は 500 となる。

以上（前半終わり、後半へ続く）