

IV 水理学の基礎としてのナビエ=ストークスの運動方程式の誘導とフロック状粒子に作用する力の解析 (流体力学・水理学の基礎 (I) 後半 (2020.12.20))

3. 流れの中にある固形物粒子に作用する力の考察と表現

3.1 固形物粒子と流体粒子の関係

前節までは、質点の力学から始まり、連続体の力学、ニュートン流体の力学の説明を行い、ナビエ=ストークスの運動方程式の誘導を行った。ナビエ=ストークスの運動方程式は、ニュートン流体の解析の基本となる関係式であり、層流、乱流の解析、平均流速公式の誘導の基礎を与えるものとなる。しかし、一方でナビエ=ストークスの運動方程式は、非圧縮性のニュートン流体から構成される微小直方体の流体粒子に作用する力の関係を運動方程式としてまとめた記述ともいえるので、流体粒子に相当する固形物粒子を想定すれば、ナビエ=ストークスの運動方程式は、微小な固形物粒子の運動方程式を表現する関係となることが分かる。従って、微小固形物粒子は、重力のような外力、それと流体圧の勾配による面に垂直に働く流体圧、流体の粘性に起因する表面応力、レイノズル応力に相当する表面応力、を受けて総括的な質量力を生じる運動を行うと想定することができる。このとき、式 (26) は固形物粒子の運動方程式として見なすことができる。

式 (26) に示される運動方程式を微小固形物粒子にかかわる運動方程式とするとき、固形物粒子と流体粒子に運動上の差異があるときには、固形物粒子と流体粒子の間に相対的な運動が生じ、固形物粒子の運動に影響を与えることになる。固形物粒子と流体粒子の物性上の差異は密度、圧縮性と流動条件に応じる変形の仕方の差として実体化される。水処理等において対象となるフロック状の固形物粒子の密度は多くの場合には流体としての水の密度とはほぼ同じと見なすことができるが、一方ではわずかな密度の差により沈殿池での固液分離が進むことにもなることは注意しなければならない。また、圧縮性については、フロック状の固形物においては、内部が水で満たされていることから、水と同様に非圧縮性の固形物と見なすことができ、相対的な運動は生じない。

固形物粒子と流体粒子が示す物性の中で大きな相対的に異なる挙動を示す特性は、粒子に作用する表面応力に対応する変形の仕方の差となって具体化される。この変形の仕方の差は、流体粒子はどこまでも流動変形を継続しうのに対して、固形物粒子は形状を保つための強度を越える表面応力に対しては、形状を維持できずに破壊されてしまうことになる。まさにこの破壊を生じる現象が、フロック状物体の特徴であり、フロックの強度を論じる出発点となるところである。

ここで、固形物粒子あるいは流体粒子に作用する表面応力は、式 (29) の右辺第 3 項と第 4 項として評価される。繰り返しになるが、第 3 項は粘性応力を評価するものとなり、第 4 項は乱流条件の下でのレイノズル応力に相当する応力を評価するものである。第 3 項から第 4 項への接続の問題は、次節に定義する Re_p との関係で論じられることになる。このような表面応力を定量的に求める検討は次節以降において行う。

3.2 流体との密度差が固形物粒子に作用する力の評価：静止流体中を沈降する単粒子に作用する力の評価

静止状態の水中の固形物粒子（この場合にはフロック状の粒子ではなくて、砂粒のような内部を流体が透過していくような可能性のない緻密な球形の粒子を想定している）の沈降現象に対しては、粒子に働く重力と流体から受ける浮力と沈降に伴う摩擦抵抗力が釣り合う条件として、終速度と呼ばれる式（30）で示される等速度での沈降現象が実現する。

$$\rho_p gV = \rho gV + C_d A (\rho v^2 / 2) \quad (30)$$

但し、 ρ_p ：球状固形物粒子の密度、 ρ ：流体の密度、 g ：重力の加速度、 V ：球形粒子の体積、 A ：球形粒子の投影面積、 C_d ：個体粒子に働く抵抗係数、 v ：個体粒子の終速度、 d ：球形粒子の直径。

終速度 v は式（31）と表わすことができる。

$$v = ((4/3) ((\rho_p - \rho) / \rho) g C_d d)^{1/2} \quad (31)$$

このとき、抵抗係数 C_d は $Re_p = \rho dv / \mu$ の関数として与えられる。この抵抗係数と Re 数との関係は、 Re_p 数の小さい範囲の様な流れの中にある球形単粒子に働く摩擦抵抗力 (D) との関係は、ストークスの抵抗法則として式（32）のように求められる。

$$D = 3 \pi d \mu v = C_d \rho (\pi (d^2/4)) (v^2/2) = (24 / (\rho dv / \mu)) \rho \pi (d^2/4) (v^2/2)$$

$$C_d = 24 / (\rho dv / \mu) = 24 / Re_p \quad (\text{但し、} Re_p = \rho dv / \mu < 1) \quad (32)$$

ここに求めた摩擦抵抗力は、球体の沈降方向の両端における圧力差として働くので、粒子に対しては、粒子を押しつぶすような力として作用することになる。このような力は、流体と粒子の密度に差のある場合に実体化されることになる。粒子の強度がこの圧力差に耐えられないとき粒子は破壊される。

抵抗係数 C_d は粒子周辺の流速あるいは沈降速度が大きくなると変化していき、 Re_p 数との関係の例は、 Re_p^n の関数として表-1 に示されるような関係となることが示されている。 Re_p 数が 10^3 以上の時 C_d は一定な値 0.4 となる。

表 - 1 レイノズル数と抵抗係数、沈降速度式の関係

Re 数の範囲	n	C_d	沈降速度式	式の名称
<1	1	$24/Re$	$g(\rho' - \rho) d^2 / (18\mu)$	ストークス式
1~100	0.5	$12.65/Re^{0.5}$	$0.223 [(\rho' - \rho)^2 / \mu \rho \cdot g^2]^{1/3} d$	アレン式
$10^3 \sim 2.5 \times 10^5$	0	0.4	$1.82 [(\rho' - \rho) / \rho \cdot g d]^{1/2}$	ニュートン式

(出典：水理公式集 昭和 62 年版 土木学会)

松尾友矩編「水環境工学」(オーム社)

3.3 流体中に浮遊する流体と密度差のある粒子に作用する力の評価

流体中に浮遊する固形物とに密度差がある場合（多くの場合に固形物の密度が流体であ

る水の密度よりも大きいケースを想定することになる)に粒子の運動を記述するモデルは、Tchen のモデルとして下に添付する資料の式 (7.58) として示される。このような解析においては、粒子密度の差に起因する相対速度を求める必要があり、固形物粒子へ働く力は、次のように求めることができる。

c. 実質的な相対速度による動圧差の評価

従来解析において最も有力とされた式 (7.54), (7.56) の関係も次元解析的な意味合いの方が強く、力の作用する物理的メカニズムについてはなお説明が求められている。この点に関して、Parker らは、Tchen²⁰⁾ のモデルを出発点として流体とフロック粒子の実質的な相対速度を求め、これによってもたらされる摩擦抵抗力が粒子に作用する力に相当するとして、次のように定式化を進めた。

粒子に作用する力の釣合いは、式 (7.58) で示される。

$$\rho_p V_p \frac{du_p}{dt} = \frac{k_f}{2} \rho_s v^2 + \rho V_p \frac{du}{dt} + \frac{1}{2} \rho V_p \left(\frac{du}{dt} - \frac{du_p}{dt} \right) + F_e + B \quad (7.58)$$

ただし、 ρ_p : 粒子の密度、 V_p : 粒子の体積、 ρ : 流体の密度、 s : 粒子の投影面積、 u_p : 粒子の速度、 u : 流体の速度、 $v = u - u_p$: 実質的な粒子と流体の相対速度、 $k_f = K/R_{ep}^n$: 摩擦抵抗係数 ($R_{ep} = d \cdot v/\nu$, K, n は R_{ep} の関数、 d は粒径)、 F_e : 重力などの外力項、 B : Basset 項。

ここで、 F_e 項、 B 項が無視できるような運動の条件を考えた場合には、粒子と流体の実質的な相対速度は式 (7.59) のように求められる。

$$v = \frac{[(\rho_p - \rho)V_p]^{1/2} u}{\left[\left(\rho_p + \frac{\rho}{2} \right) V_p + \frac{k_f}{2} \rho s r \right]^{1/2}} \quad (7.59)$$

ただし、 r : 渦のスケール、 $du/dt = u^2/r$, $dv/dt = v^2/r$ 。

このときの流体運動としては、粒子の運動に最も強い影響を与えるものを考えなければならないが、それは、粒子径に相当するスケールの渦運動であると考えられる。したがって、流体の速度 u には、粒径 d の変化に対応させて式 (7.53), (7.55) で与えられる速度を適用する。このようにしたとき、粒子に働く力は式 (7.60) で求められる。

$$\tau = \frac{k_f}{2} \cdot \rho_s v^2 \quad (7.60)$$

次に、Parker らの取扱いを若干修正する形で k_f について考えれば、 k_f は R_{ep} の関数として表 7.1 のように求められる。ストークス領域とニュートン領域に分けると、 τ は

表 7・1 Re_p, n, K の関係

	Re_p	n	K
ストークスの領域	$Re_p < 1$	1	24
アレンの領域	$1 < Re_p < 10^3$	$\frac{1}{2}$	12.65
ニュートンの領域	$10^3 < Re_p$	0	0.4

式 (7・61a), (7・61b) として与えられる.

ストークス領域に対して

$$\tau = 3\pi d\mu v \quad (7 \cdot 61 a)$$

ニュートン領域に対して

$$\tau = 0.4\rho \frac{\pi}{4} d^2 v^2 \quad (7 \cdot 61 b)$$

以上のように求めてきた定式化は、粒子と流体の実質的な相対速度に基づいて発生する力を評価するものであり物理的意味合いの明確なモデルであるといえる。しかし、 v が $(\rho_p - \rho)$ の関数になっている点に最大の難点がある。フロックのように $\rho_p \approx \rho$ と考えられるような場合には、相対速度が極めて小さいものになってしまうからである。

なお、上に添付した資料は、本間仁、林泰造編「続水理学」(丸善、1980) p.271 によっている。当資料は「7.3 水処理の水理」として筆者が記述したものである。固形物粒子と流体粒子の間に明確な密度差がある場合には、資料中に示される、式(7.61a)および式(7.61b)として示すことができるが、最大の問題は、密度差が小さくなる時には固形物粒子へ働く摩擦応力は非常に小さいものになってしまうことにある。この問題についてはフロックの強度を議論する際に再度触れることになる。

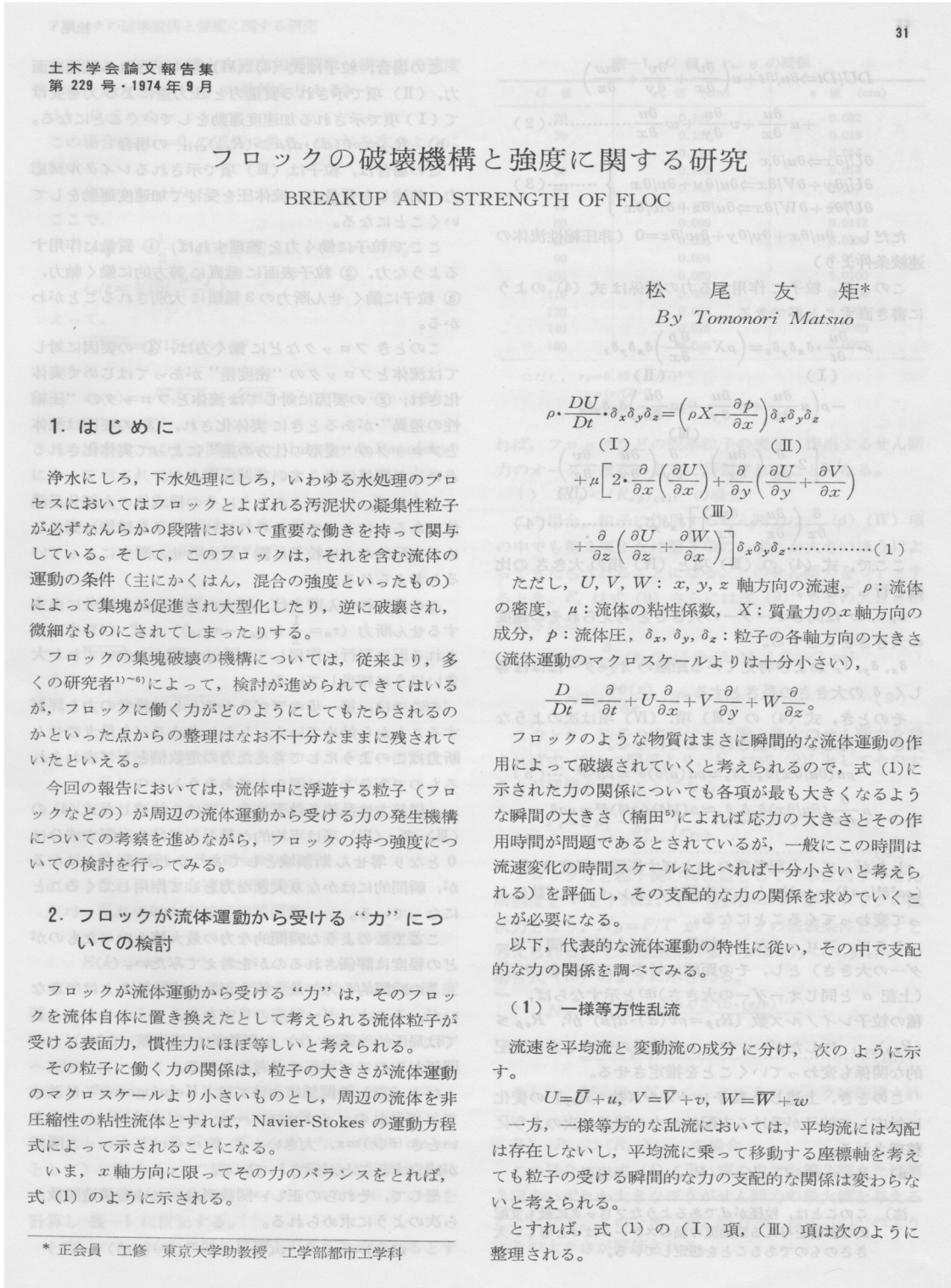
4. 中立浮遊固形物 (水とほぼ等しい密度を持つフロック状の固形物) に作用する表面応力の評価

固形物粒子の密度が流体 (以後は水を対象として考えることにする) とほぼ等しくかつ構造は内部がスカスカで内部まで流体が連続しているような粒子 (フロック状の固形物) を想定し、そのような粒子に働く力を評価することを考えることにする。このような水の密度に近く、内部がスカスカで事実上流体と同じに非圧縮性の特性を持つ固形物粒子に対して作用する力は、密度の効果や圧縮性の効果は極めて小さいことが推定され、粒子に作用する表面応力が主要な要素となる。

このとき、平均流に対して一様性と定常性を仮定すれば、平均流の速度勾配は生じないので、平均流に乗った固形物粒子作用する表面応力は、変動速度の成分のレベルで生じる粘性応力とレイノルズ応力と考えることができる。このとき、平均流に乗って動く座標軸においては式 (2) の固形物粒子の運動方程式において、平均流に関する流速成分の影響は 0 となるので、変動流速の成分だけが残る運動方程式として式 (26) は式 (34) に示される。

$$\frac{\partial w}{\partial t} = F_x - \left(\frac{1}{\rho}\right) \frac{\partial p}{\partial x} + \left(\frac{\mu}{\rho}\right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) \cdot \left(\frac{\partial u w}{\partial x} + \frac{\partial u' v'}{\partial y} + \frac{\partial u w'}{\partial z}\right) \quad (34)$$

ここで、変動流速のオーダーの速度と粒子径に相当する長さに対応する Re_p を定義して、 $(Re_p)_{crit}$ を設定すれば、主となる表面応力は第3項から第4項へと変化していくことになる。筆者はこのような考え方を論文として発表しているので、その論文の一部を添付することで、本稿での説明に代えたい。フロックの強度については章を分けて論ずることにする。



フロックの破壊機構と強度に関する研究

BREAKUP AND STRENGTH OF FLOC

松尾友矩*

By Tomonori Matsuo

1. はじめに

浄水にしろ、下水処理にしろ、いわゆる水処理のプロセスにおいてはフロックとよばれる汚泥状の凝集性粒子が必ずなんらかの段階において重要な働きを持って関与している。そして、このフロックは、それを含む流体の運動の条件（主にかくはん、混合の強度といったもの）によって集塊が促進され大型化したり、逆に破壊され、微細なものにされてしまったりする。

フロックの集塊破壊の機構については、従来より、多くの研究者^{1)~6)}によって、検討が進められてきてはいるが、フロックに働く力がどのようにしてもたらされるのかといった点からの整理はなお不十分のままに残されていたといえる。

今回の報告においては、流体中に浮遊する粒子（フロックなどの）が周辺の流体運動から受ける力の発生機構についての考察を進めながら、フロックの持つ強度についての検討を行ってみる。

2. フロックが流体運動から受ける“力”についての検討

フロックが流体運動から受ける“力”は、そのフロックを流体自体に置き換えたとして考えられる流体粒子が受ける表面力、慣性力にほぼ等しいと考えられる。

その粒子に働く力の関係は、粒子の大きさが流体運動のマクロスケールより小さいものとし、周辺の流体を非圧縮性の粘性流体とすれば、Navier-Stokesの運動方程式によって示されることになる。

いま、 x 軸方向に限ってその力のバランスをとれば、式(1)のように示される。

$$\rho \cdot \frac{DU}{Dt} \cdot \delta_x \delta_y \delta_z = \left(\rho X - \frac{\partial p}{\partial x} \right) \delta_x \delta_y \delta_z \quad (I)$$

$$+ \mu \left[2 \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \right] \delta_x \delta_y \delta_z \quad (II)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right) \delta_x \delta_y \delta_z \dots \dots \dots (1) \quad (III)$$

ただし、 U, V, W : x, y, z 軸方向の流速、 ρ : 流体の密度、 μ : 流体の粘性係数、 X : 質量力の x 軸方向の成分、 p : 流体圧、 $\delta_x, \delta_y, \delta_z$: 粒子の各軸方向の大きさ（流体運動のマクロスケールよりは十分小さい）、

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} + V \frac{\partial}{\partial y} + W \frac{\partial}{\partial z}$$

フロックのような物質はまさに瞬間的な流体運動の作用によって破壊されていくと考えられるので、式(1)に示された力の関係についても各項が最も大きくなるような瞬間の大きさ（楠田⁵⁾によれば応力の大きさとその作用時間が問題であるとされているが、一般にこの時間は流速変化の時間スケールに比べれば十分小さいと考えられる）を評価し、その支配的な力の関係を求めていくことが必要になる。

以下、代表的な流体運動の特性に従い、その中で支配的な力の関係を調べてみる。

(1) 一様等方性乱流

流速を平均流と変動流の成分に分け、次のように示す。

$$U = \bar{U} + u, \quad V = \bar{V} + v, \quad W = \bar{W} + w$$

一方、一様等方的な乱流においては、平均流には勾配は存在しないし、平均流に乗って移動する座標軸を考えても粒子の受ける瞬間的な力の支配的な関係は変わらないと考えられる。

とすれば、式(1)の(I)項、(III)項は次のように整理される。

* 正会員 工修 東京大学助教授 工学部都市工学科

$$DU/Dt \Rightarrow \partial u/\partial t + u \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \dots\dots\dots (2)$$

$$\left. \begin{aligned} \partial U/\partial x &\Rightarrow \partial u/\partial x \\ \partial U/\partial y + \partial V/\partial x &\Rightarrow \partial u/\partial y + \partial v/\partial x \\ \partial U/\partial z + \partial W/\partial x &\Rightarrow \partial u/\partial z + \partial w/\partial x \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

ただし、 $\partial u/\partial x + \partial v/\partial y + \partial w/\partial z = 0$ (非圧縮性流体の連続条件より)

このとき、粒子に作用する力の関係は式(4)のように書き直すことができる。

$$\begin{aligned} \rho \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \delta_x \delta_y \delta_z &= \left(\rho X - \frac{\partial p}{\partial x} \right) \delta_x \delta_y \delta_z && \text{(I)} \\ & - \rho \left[u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right] \delta_x \delta_y \delta_z && \text{(II)} \\ & + \mu \left[2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \delta_x \delta_y \delta_z && \text{(III)} \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \delta_x \delta_y \delta_z && \text{(IV)} \end{aligned} \dots\dots\dots (4)$$

ここで、式(4)の(III)項と(IV)項の大きさの比較を行ってみる。

u, v, w は同じオーダーの大きさと考えられその速度の大きさを a とする。

$\delta_x, \delta_y, \delta_z$ および考えている距離のオーダーはほぼ等しく δ の大きさの長さとする。

そのとき、式(4)の(III)項、(IV)項は次のような大きさの力として評価されることになる。

$$\begin{aligned} \rho u (\partial u/\partial x) \delta_x \delta_y \delta_z &\approx \rho a (a/\delta) \delta^3 = \rho a^2 \delta^2 \dots\dots\dots (5) \\ \mu \frac{\partial}{\partial x} (\partial u/\partial x) \delta_x \delta_y \delta_z &\approx \mu (1/\delta) (a/\delta) \delta^3 = \mu a \delta \dots\dots\dots (6) \end{aligned}$$

したがって、上記各項のおよぼす影響の程度は $R_e = (\rho a^2 \delta^2 / \mu a \delta) = \rho a \delta / \mu$ として定義されるレイノルズ数によって変わってくることになる。

ここで、フロックなどの粒径を d (上記 δ と同じオーダーの大きさ) とし、その距離に対応する速度を $\bar{v}(d)$ (上記 a と同じオーダーの大きさ) と示すならば、一種の粒子レイノルズ数 ($R_{ep} = \rho \bar{v}(d) \cdot d / \mu$) が、 $R_{ep} \leq (R_{ep})_{crit.}$ にしたがって、フロック粒子の受ける力の支配的な関係も変わっていくことを推定させる。

このとき、上述した粒子レイノルズ数 (R_{ep}) の変化に対応して粒子が受ける支配的な力の関係は次のように整理される。

a) $R_{ep} = \rho \bar{v}(d) \cdot d / \mu < (R_{ep})_{crit.}$ の場合

注) このことは、粒径が d であるようなフロックに最も支配的な影響を与える変動流の渦のスケールは d と等しい大きさのものであることを想定している。

この場合、粒子は式(4)(VI)項で示される粘性表面力、(II)項で示される質量力と圧力差による力を受けて(Ⅰ)項で示される加速度運動をしていくことになる。

b) $R_{ep} = \rho \bar{v}(d) \cdot d / \mu > (R_{ep})_{crit.}$ の場合

この場合は、粒子は(Ⅲ)項で示されるレイノルズ応力、前述した質量力、流体圧を受けて加速度運動をしていくことになる。

ここで粒子に働く力を整理すれば、① 質量に作用するような力、② 粒子表面に垂直に等方的に働く軸力、③ 粒子に働くせん断力の3種類に大別されることがわかる。

このときフロックなどに働く力は、①の要因に対しては流体とフロックの“密度差”があってはじめて実体化され、②の要因に対しては流体とフロックの“圧縮性の差異”があるときに実体化され、③の要因は流体とフロックの“変形の仕方の差”によって実体化されるといった関係になっているといえよう。

とすれば、フロックのようにその構成体の大部分が流体である水によって占められている粒子を破壊に到らしめる支配的な力は粒子に働く最大のせん断力によっていると考えられる。

この最大のせん断力は、軸力の非等方的な成分に由来するせん断力 ($\tau_n = \frac{1}{2}(\sigma_{max} - \sigma_{min})$) と式(4)中に示される面に平行に作用しているせん断力とのいずれか大きいほうに相当している。

ここでは、第一歩のアプローチとして後者の力を評価することから始めていく。しかし求めるべき最大のせん断力はこのようにして考えた力の定数倍として表わされるものであることは明らかであろう。

一様等方性乱流条件下にあっては、前述した式(4)の(Ⅲ)項、(Ⅳ)項は平均的な量としてはせん断力成分は0となり零せん断領域としてあつかわれることになるが、瞬間的にはかなり大きな力として作用してくるようになっている。

ここでこのような瞬間的な力の最大値といったものがどの程度に評価されるのかを考えてみたい。

この瞬間的な力の最大値を正しく求めることはできないが、そのオーダー程度の目安を与えてくれるものとしては局所的な距離 (r) と平均的な速度差 ($\bar{v}(r)$) との関係からのアプローチが考えられる。

r と $\bar{v}(r)$ の関係については、Kolmogorov⁷⁾ によって r が乱れのマイクロスケール ($\eta = (\nu^3/\epsilon)^{1/4}$) より小さいとき $\bar{v}(r)$ の r 、大きいとき $\bar{v}(r)$ の $r^{1/3}$ といった関係が成立することが示されている。

そして、それらの正しい関数形はいわゆる構造関数から次のように求められる。

$$\overline{\bar{v}^2(r)} = [\overline{v(r) - v(0)}]^2 = 2 u'^2 (1 - g(r)) \dots\dots (7)$$

ただし、 $g(r)$ は横方向速度相関関数（横方向の速度差のほうが大きな $\bar{v}(r)$ の数値を与える）

i) $0 \leq r \ll \eta$

この場合は、 $r=0$ の近傍で考え、 $g(r)$ を次のように近似する。

$$g(r) = 1 - r^2 / \lambda_g^2$$

ここで、

$$1/\lambda_g^2 = -\frac{1}{2} [\partial^2 g(r) / \partial r^2]_{r=0}, \quad \epsilon = 15 \nu \cdot u'^2 / \lambda_g^2,$$

$$\lambda_g / \eta = \sqrt[4]{15} \left(\frac{u' \lambda_g}{\nu} \right)^{1/2}$$

よって、

$$\bar{v}_1^2(r) = 2/15 \cdot (\epsilon/\nu) \cdot r^2$$

さらに、

$$\bar{v}_1(r) = \sqrt{\bar{v}_1^2(r)} = \sqrt{2/15} \cdot (\epsilon/\nu)^{1/2} \cdot r \dots \dots \dots (8)$$

ii) $\eta \ll r \ll l$

この場合は、 $g(r)$ の関数形は、Lumley & Panofsky⁸⁾ によって示されている構造関数により次のように求められる。

$$g(r) = (1/2 r) (\partial / \partial r (r^2 f(r))) \\ = 1 - 0.873 \alpha (\epsilon^{2/3} / u'^2) r^{2/3}$$

ここで、

$$f(r) = 1 - 0.655 \alpha (\epsilon^{2/3} / u'^2) r^{2/3}, \quad (\alpha = 1.4)$$

よって、

$$\bar{v}_2^2(r) = 2.45 (\epsilon \cdot r)^{2/3}$$

さらに、

$$\bar{v}_2(r) = \sqrt{\bar{v}_2^2(r)} = 1.57 \epsilon^{1/3} r^{1/3} \dots \dots \dots (8)'$$

ただし、

ϵ : 単位時間、単位質量当りのエネルギー消散量

η : 乱れのマイクロスケール ($\eta = (\nu^3/\epsilon)^{1/4}$)

l : 乱れのエネルギー含有渦のマクロスケール

ν : 流体の動粘性係数

u' : 乱流強度 ($u'^2 = \bar{u}^2 = \bar{v}^2 = \bar{w}^2$)

$g(r)$: 乱れの横方向速度相関関数

$f(r)$: 乱れの軸方向速度相関関数

α : エネルギースペクトル関数に係る普遍定数

$$E(k) = \alpha \epsilon^{2/3} k^{-5/3}, \quad \text{ただし、} \eta \ll 1/k \ll l$$

$\bar{v}(r)$: r だけ離れた地点間の横方向の平均的な速度差。

r と $\bar{v}(r)$ の関係は r の変化につれて式(8)から式(8)'へ接続していくことになるが、その過程については不明な部分が多い。しかし次章で行う数値計算に際しては、 $\bar{v}_1(r_0) = \bar{v}_2(r_0)$ となる $r=r_0$ を境界として使い分けていくことにする。各 G 値 ($G = (\epsilon/\nu)^{1/2}$, $\nu = 1/100$ cm/sec とし) に対する r_0 の値は表-1 のように計算される。また、参考値として乱れのマイクロスケール η の値を計算し表-1 に併記する。

一方、 r と $\bar{v}(r)$ の関係が以上のように示されるとす

表-1 G 値と r_0 , η の関係

G 値	r_0 値 (cm)	η 値 (cm)
20	0.199	0.022
30	0.162	0.018
40	0.141	0.016
50	0.126	0.014
60	0.115	0.013
75	0.103	0.012
80	0.099	0.0112
85	0.096	0.0109
90	0.094	0.0105
100	0.089	0.0100
110	0.085	0.0095
120	0.081	0.0091
140	0.075	0.0085
180	0.066	0.0075

ただし、 $r_0 = 8.88 \times (\nu/G)^{1/2}$
 $\eta = (\nu/G)^{1/2}$
 $\nu = 1/100$ (cm²/sec)

れば、フロックなどの固形粒子の表面に作用するせん断力のオーダーは次のように評価されることになる。

i) $R_{ep} < (R_{ep})_{crit.}$ の場合

この場合、粒子に作用するせん断力は式(4) (IV) 項の中でも第2項または第3項のいずれか大きいほうによってもたらされることになる。このせん断力を F_1 とするとき、 F_1 は式(9)さらには式(9)'でその大きさが評価される。

$$F_1 = \mu \frac{\partial}{\partial y} (\partial u / \partial y + \partial v / \partial x) \delta_x \delta_y \delta_z \approx 2 \mu \alpha d \\ \approx 2 \mu \frac{\partial \bar{v}(r)}{\partial r} \cdot d^2 \dots \dots \dots (9)$$

このとき、粒子の表面付近に働く最大のせん断力を考えれば式(8)'の関係より、 F_1 は式(9)'としてその大きさが評価されることになる。

$$F_1 = 2 \mu \left(\frac{\partial \bar{v}(r)}{\partial r} \right)_{r=r_0} \cdot d^2 = 2 \mu \cdot \sqrt{2/15} \cdot (\epsilon/\nu)^{1/2} \cdot d^2 \\ \dots \dots \dots (9)'$$

フロックなど粒子側の物性値としての単位当りのせん断強度を τ とすれば、 $T = \tau \delta_x \delta_z \approx \tau \cdot d^2$ がフロックの抵抗力となり、 $N_B = F/T$ がフロックの破壊条件を示すと考えられる。この破壊条件数 N_B は $R_{ep} < (R_{ep})_{crit.}$ の場合式(10)のように示される。

$$N_{B1} = F_1/T \approx \frac{2 \mu \sqrt{2/15} \cdot (\epsilon/\nu)^{1/2}}{\tau d^2} \\ = \frac{2 \mu \sqrt{2/15} \cdot (\epsilon/\nu)^{1/2}}{\tau} \dots \dots \dots (10)$$

そして、 $N_{B1} \geq (N_B)_{crit.}$ のときフロックは破壊されていく。

ii) $R_{ep} > (R_{ep})_{crit.}$ の場合

この場合は、式(4) (III) 項の中でも第2項または第3項のいずれか大きなほうのせん断力の最大値を与えることになる。このとき、せん断力 F_2 は式(11)のようにその大きさが評価される。

$$F_2 = \rho v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \delta_x \delta_y \delta_z \approx \rho a^2 \delta^2 \approx \rho \bar{v}^2(d) \cdot d^2 \quad \dots\dots\dots(11)$$

式 (10) と同様にして破壊条件数 N_{B2} は式 (12) のように示すことができる。

$$N_{B2} = F_2/T \approx \frac{\rho \bar{v}^2(d) \cdot d^2}{\tau \cdot d^2} = \rho \bar{v}^2(d)/\tau \quad \dots\dots\dots(12)$$

(2) 非等方性乱流

非等方性の乱流においては、平均流からの影響を一様等方性の場合のようには簡単に無視するわけにはいかない。ここでは力の関係を整理することを第一の目的としており、 $U = \bar{U} + u$, $\bar{V} = \bar{W} = 0$, $V = v$, $W = w$, $\partial \bar{U}/\partial x = 0$ といった流れの条件を考え検討していく。

式 (1) の (I) 項, (III) 項はそれぞれ式 (13), (14) として示される。

$$DU/Dt = \partial u/\partial t + (v\partial \bar{U}/\partial y + w\partial \bar{U}/\partial z) + ((\bar{U} + u)\partial u/\partial x + v\partial u/\partial y + w\partial u/\partial z) \quad \dots\dots\dots(13)$$

$$\left. \begin{aligned} \partial U/\partial x &= \partial u/\partial x \\ \partial U/\partial y + \partial V/\partial x &= \partial \bar{U}/\partial y + \partial u/\partial y + \partial v/\partial x \\ \partial U/\partial z + \partial W/\partial x &= \partial \bar{U}/\partial z + \partial u/\partial z + \partial w/\partial x \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(14)$$

(14), (13) 両式における表面せん断力 F_3 , F_4 は、式 (15), (16) のように求められる。

$$F_3 = \mu \frac{\partial}{\partial y} (\partial \bar{U}/\partial y + \partial u/\partial y + \partial v/\partial x) \delta_x \delta_y \delta_z \quad \dots\dots\dots(15)$$

$$F_4 = \rho v (\partial \bar{U}/\partial y + \partial u/\partial y) \delta_x \delta_y \delta_z \quad \dots\dots\dots(16)$$

ここで、混合距離理論に従うとすれば、 $u = \partial \bar{U}/\partial y \cdot \delta y$ と示される。さらに $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial y} \cdot \delta y \right) \approx \partial u/\partial y$ といった操作を考えると、式 (15), (16) は式 (15)', (16)' としてその大きさが評価される。

$$F_3 \approx 3 \mu a \delta \approx 3 \mu \left(\frac{\partial \bar{v}(r)}{\partial r} \right) d^2 \quad \dots\dots\dots(15)'$$

$$F_4 \approx 2 \rho a^2 \delta^2 \approx 2 \rho \bar{v}^2(d) d^2 \quad \dots\dots\dots(16)'$$

このとき F_3 と F_4 の影響の仕方は、一様等方性の場合と同様なプロセスで評価され、 $R_{ep} = \rho \bar{v}(d) \cdot d/\mu \leq (R_{ep})_{crit.}$ の判定に従いその卓越する力が決定される。

非等方性領域における r と $\bar{v}(r)$ の関係については正確な知識は得られていないが、 r が大きくない範囲では一様等方性領域において得られている関係を使うことは第一近似としては十分有効であると考えられる。

このとき粒子 (フロック) の破壊条件は次のように整理される。

i) $R_{ep} < (R_{ep})_{crit.}$ の場合

このときは、式 (15)' で示される F_3 が最も大きなせん断力を与えることになり、破壊条件数 N_{B3} は式 (17)

のように示される。

$$N_{B3} = F_3/T \approx \frac{3 \mu \left(\frac{\partial \bar{v}(r)}{\partial r} \right)_{r=0} d^2}{\tau \cdot d^2} = \frac{3 \mu \sqrt{2/15} \cdot (\varepsilon/\nu)^{1/2}}{\tau} \quad \dots\dots\dots(17)$$

一様等方性領域に比べて1.5倍程度大きな力を受ける可能性があることがわかる。

ii) $R_{ep} > (R_{ep})_{crit.}$ の場合

このときは式 (16)' で示されるせん断力が最も大きな力として作用することになり、 N_{B4} は式 (18) のように示される。

$$N_{B4} = F_4/T \approx \frac{2 \rho \cdot \bar{v}^2(d) \cdot d^2}{\tau \cdot d^2} = 2 \rho \cdot \bar{v}^2(d)/\tau \quad \dots\dots\dots(18)$$

この場合は、一様等方性領域に比べてほぼ2倍の大きさの力を作用させることになっている。

いずれにしても、非等方性領域においてはフロックなどはより小さく破壊されていくであろうことが推定される。

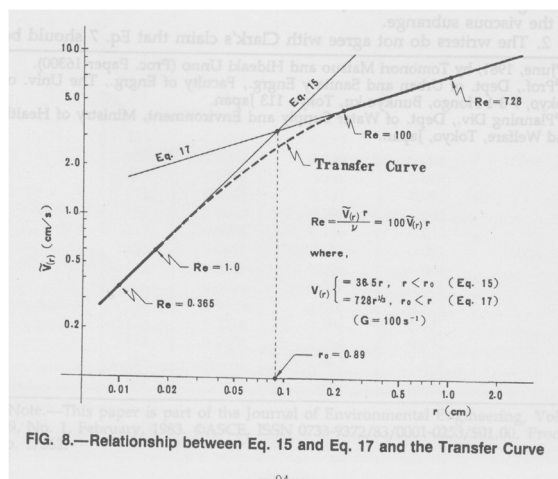
(3) 層流

流体運動が層流状態にある場合は、 $u = v = w = 0$ であり、また当然粘性力が卓越した関係にある。この場合の破壊条件数 N_{B5} は、式 (19) のように示される。

$$N_{B5} = F_5/T = \mu \frac{\partial}{\partial y} (\partial U/\partial y + \partial V/\partial x) \delta_x \delta_y \delta_z / \tau \delta_x \delta_z = \mu (\partial U/\partial y + \partial V/\partial x) / \tau \quad \dots\dots\dots(19)$$

ただし、 $(\partial U/\partial y + \partial V/\partial x)$ を最大成分と考える。

なお、当論文 p. 33 に示される式 (8) 及び式 (8') 式の関係は、下図 (Fig.8) に示すように、それぞれ Eq.15 及び Eq.17 として示される関係にあることを参考文献 (8) において示している。変動流速にかかわる相関関数からの解析がエネルギースペクトルからの解析よりも有効な解析例となることが示される。



5. 流体と固形物粒子の間に圧縮性に差異のある場合に粒子にかかる力の評価

流体と粒子の圧縮性に差がある場合は、流体圧そのものを粒子は受けることになる。流体圧は等方的であるから、球形を仮定した粒子にあっては、表面に垂直にかかる力として作用する。まさに全表面から押しつぶされるような力を受けることになる。このような流体圧は、例えば水のような流体の中に存在する気泡のような粒子を考えれば、深いところから浮上してくるようなケースでは、気泡径は次第に大きくなり、気液界面での表面張力が耐えられなくなるところで、気泡は破裂して破壊することになる。但し、非圧縮性の油滴のような粒子においては、圧力による変形は生じず密度差による沈降あるいは浮上の運動をするか、中立となりその場所に留まり続けることになる。

ブロック状の固形物については、流体が内部にまで接続しているので、流体圧による変形は生じない。密度が流体と等しい中立粒子であるとき、相対的な運動は生じず、表面応力の効果は生じないと考えられる。

6. 総括

本章 (IV章) においては、水理学の初学者 (高校物理の質点の力学を学んだ学生諸子を対象として) が土木の分野の力学 (本稿では水理学) を学ぶ手助けを考えて、最初の導入を特に詳しく扱っている。そして、水理学の一つの力学体系の基礎となるナビエ=ストークスの運動方程式の誘導を説明している。実はナビエ=ストークスの運動方程式と土木の水理学の応用分野とは必ずしも直接的にはかかわらない (実はこの点が初学者にとって水理学が分かり難くなる原因にもなっている) ことにもなるが、連続体である流体の力学の基礎の運動方程式はナビエ=ストークスの運動方程式となるので、その誘導の考え方を基本として

学ぶことは非常に重要なステップとなる。そこで、本稿においては、ナビエ＝ストークスの運動方程式の誘導をなるべく丁寧に説明している。

求めたナビエ＝ストークスの運動方程式の展開として、流体中に浮遊する固形物粒子へ作用する力を定量的に求める関係式の提示を行っている。ナビエ＝ストークスの運動方程式は流体粒子に働く力の関係を運動方程式として記述する方法であったが、流体粒子を固形物粒子に置き換えて、固形物粒子の運動方程式としてとらえ、固形物粒子へ働く力の解析を行っている点が特徴的な扱いとなっている。このように扱うことで、中立浮遊粒子として扱ってもよいような密度が水の密度に近い固形物粒子に作用する力を定量的に評価することが可能となり、フロック状固形物に対する強度の定量的な推定が可能となったといえる。なお、フロック状の固形物の強度の定量化については、章を改めて論ずることとしたい。

5. 参考文献

いくつかの図、数式については、個別に引用文献を記述している。本稿の記述に際して、参考とした文献は以下の通りである。

- 1) 日野幹雄「流体力学」理工学基礎講座 16 (朝倉書店、1974)
- 2) 日野幹雄「明解水理学」(丸善、1983)
- 3) 小川浩平「流体移動解析」シリーズ新しい化学工学 (朝倉書店、2011)
- 4) 藤田勝久「基本を学ぶ流体力学」(森北出版、2019)
- 5) 本間仁、林泰造編「続水理学」(丸善、1980)
- 6) 松尾友矩編「水環境工学」(オーム社、改訂3版、2017)
- 7) 松尾友矩「「フロックの破壊機構と強度に関する研究」(土木学会論文報告集、No.229、1974年9月)
- 8) Tomonori Matsuo, Hideaki Unno “Forces Acting on Floc and Strength of Floc” Response to the Discussion, ASCE (Vol. 109, No. 1, pp.93-99, February, 1983)

以上