

IV-2 水理学の基礎(2)ーベルヌーイの定理の誘導・応用、乱流条件でのエネルギー消費の評価、攪拌槽の G 値とフロック強度の推定

「IV 水理学の基礎としてのナビエ＝ストークスの運動方程式の誘導とフロック状粒子に作用する力の解析（流体力学・水理学の基礎（I）（2020.12.20）」においては、水の微小直方体（流体粒子）に作用する力と変形の間関係を流体力学の体系の導入部として説明してきた。また、この微小直方体に働く力の関係は、完全流体においてはオイラーの運動方程式として、ニュートン流体（粘性流体）に対してはナビエ＝ストークスの運動方程式として示されることを説明してきた。そして、その微小直方体へ働く力を流体中に浮遊する固形物粒子に作用する力として、評価する方法について具体的なプロセスを示してきた。

本稿においては、オイラーの運動方程式、ナビエ＝ストークスの運動方程式との関係において、パイプの中の流れにおけるエネルギー保存あるいは消散の評価方法を示し、その応用としての攪拌槽等におけるエネルギー損失（消散）の評価について説明する。併せて、フロック等に作用する力の評価法とフロック強度の推定方法についての解析例を示す。

また本稿では、水理学の教科書の主要テーマであるベルヌーイの定理の誘導を解説するが、ベルヌーイの定理の誘導の詳細については、日野幹雄「明解水理学」（丸善、1983年）を参照されたい。本稿においては、オイラーの運動方程式、ナビエ＝ストークスの運動方程式とベルヌーイの定理の関係に特に注意して、その説明をしていく。

1.1 運動方程式、エネルギー保存則とベルヌーイの定理

物体の運動を解析する手段としては、物体に働く力の釣り合いを示す運動方程式、物体の運動にかかわるエネルギー保存則と運動量保存則が使われる。このことは、質点の運動においても、流体の運動においても同様である。流体運動の解析において使われる運動方程式は、前述のように完全流体にかかわるオイラーの運動方程式と粘性流体にかかわるナビエ＝ストークスの運動方程式となるが、エネルギー保存則と運動量保存則は、前記運動方程式の加速度項に現われる非線形項の存在により、一般的には直接的な解析的手法はない。

しかし、完全流体、渦なしの流れ、流線に沿う流れ、あるいは定常な流れといった流体運動の条件を特定することによって、エネルギー保存則となるベルヌーイの定理を求めることができる。流線に沿う流れの解析にあつては、質点の力学とのアナロジーから想定される運動のエネルギーと位置のエネルギーの概念が流体の運動においても想定されることになる。流線の定義は、図 2-1 に示されるが、質点の力学に準じて、微小流体粒子の運動を流線に沿う質点の運動のアナロジーから、エネルギー方程式が式(2-1),(2-2)として示される。この質点の運動とのアナロジーによる方法は、オイラーの運動方程式をベースとするベルヌーイの定理とは異なる誘導方法となることは注意が必要である。

完全流体の流線に沿う運動のエネルギー保存則は、質点の力学における式(2-1)に示され

るエネルギー保存則のアナロジーとして、ベルヌーイの定理が式 (2-2)、(2-3) として求められる。流体運動においては、位置のエネルギーと併せて流体圧のエネルギーが加わることになる点は注意が必要である

$$\cdot \text{質点の運動に対して: } m\frac{v^2}{2} \text{ (運動のエネルギー)} + mgz \text{ (位置のエネルギー)} = E \text{ (一定)}$$

(2-1)

$$\cdot \text{流線に沿う流体の運動に対して: } \frac{\rho v^2}{2} \text{ (運動のエネルギー)} + \rho gz \text{ (位置のエネルギー)}$$
$$+ p \text{ (圧力のエネルギー)} = E \text{ (一定)} \quad (2-2)$$

$$\cdot \text{単位重量 } (\rho g) \text{ 当たりのエネルギーの表示: } \frac{v^2}{2g} + z + \frac{p}{\rho g} = H \text{ (一定)} \quad (2-3)$$

但し、 m : 質点の質量、 ρ : 流体の密度

v : 質点の速度、 v : 流線に接する速度

g : 重力の加速度、

p : 流体の受ける流体圧 (流体圧にかかわるエネルギーとして表示している)

z : 重力に直交する基準面から重力の方向と逆向きにとった位置の高さ、

E : エネルギーの次元を持つ定数

H : 水頭あるいは比エネルギーと呼ばれ、長さの次元を持つエネルギーの表現

流線は、完全流体が運動している場合に、ある瞬間において各点における接線の方向が速度ベクトルの方向と同じとなるように形成される曲線として定義される。一方、一つの微小流体粒子の運動の軌跡を記録した曲線は流跡線と呼ばれる。流れが定常な流れのときには、流線と流跡線は同一の曲線となる。水理学の分野では、完全流体の渦なしの定常流を出発点として、解析を進めることになるので、流線を対象とした解析が基本となる。流線は流速に接する流れを示すものなので、流線を横切る流れは生じないことになり、流線はあたかも流体を閉じ込める固体のような働きを持つことになる。何本かの流線を束ねた管状の流線群は流管と呼ばれ、固体壁に囲まれた、パイプの中の流れのような流れを表すことになる。(但し、水のような粘性流体においては、固体壁においては流速はゼロになるので、流管の定義からは外れることになるが、管路等の中の平均流の運動を考えると、管路を流管として扱うことになる。完全流体においては、流管の管壁も流速を持つものとなる。) 流線、流跡線、流管は、図-2-1 に示される。

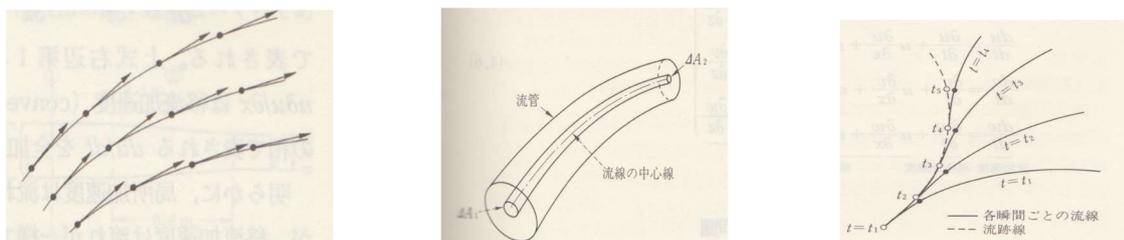


図-2-1 流線、流管、流跡線の図（林泰造「基礎水理学」(鹿島出版会、1996年)）

1.2 オイラーの運動方程式から求めるベルヌーイの定理

式(2-3)に示したベルヌーイの定理は、質点の力学からのアナロジーとして求めているが、完全流体の運動を想定したオイラーの運動方程式をベースとし、単位時間当たりの流線に沿う仕事量から誘導されるエネルギー保存則は次の【参考1】のように求められる。

【参考1】オイラーの運動方程式からのエネルギー保存則の誘導（誘導過程は本間仁「水理学」(丸善、1967)によっている)

流線の方程式は式(2-4)のように示される。

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} \quad (2-4)$$

この流線に沿った完全流体の渦なし流れでは、式-6（流体力学・水理学 I）の右辺第2項に示した、渦度の成分はゼロとなるので、流速 (u,v,w) に対して式 (2-5) の関係が示され、速度ポテンシャルの存在を仮定することができる。

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x} \quad (2-5)$$

このとき、速度 (u,v,w) は速度ポテンシャル (ϕ) による関数として式 (2-6) のように表すことができる。

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (2-6)$$

また、オイラーの運動方程式における外部から働く質量力としては、ポテンシャル (Ω) を持つ量として重力場と流体圧の作用を考え、これらの力が単位時間に流線に沿って V の速度で移動するとき、その微小流体に作用する仕事率は、外力に流線に沿う速度 V を掛けたものとして表すことができる。質量力として働く重力の働く方向の反対方向を z 軸のプラスの方向とすると、 F_x 、 F_y 、 F_z は Ω の関数として、式(2-7)のように示される。

$$F_x = -\frac{\partial \Omega}{\partial x} = 0, \quad F_y = -\frac{\partial \Omega}{\partial y} = 0, \quad F_z = -\frac{\partial \Omega}{\partial z} = -g \quad (2-7)$$

このとき以前に、流体力学・水理学 I において式(19-1)、(19-2)、(19-3) に示したオイラーの運動方程式は、式(2-8-1)、(2-8-2)、(2-8-3)と書き換えることができる。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial x} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{\partial \Omega}{\partial x} - \left(\frac{1}{\rho}\right) \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) \quad (2-8-1)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial y} + u \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{\partial \Omega}{\partial y} - \left(\frac{1}{\rho}\right) \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right) \quad (2-8-2)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial z} + u \frac{\partial u}{\partial z} + v \frac{\partial v}{\partial z} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial \Omega}{\partial z} - \left(\frac{1}{\rho}\right) \left(\frac{\partial p}{\partial z}\right) \quad (2-8-3)$$

ここで、オイラーの運動方程式に示される微小流体に作用する力による仕事量を流線の方向に ds (dx, dy, dz) を取るなら、単位時間に微小流体が行う仕事量は、微小流体に働く力に単位時間に動く距離 ($dx=u \delta t, dy=v \delta t, dz=w \delta t$) を乗じたものの3方向の和として示される。

さらに、式(2-8-1~3)の両辺に、それぞれ、 dx, dy, dz を乗じて足し合わせ、非圧縮性の流体の定常的で等温的な条件を併せると式(2-9)と示すことができる。

$$d\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right) + d\left(\frac{u^2}{2} + \frac{v^2}{2} + \frac{w^2}{2}\right) + d\Omega + \frac{dp}{\rho} = 0 \quad (2-9)$$

式(2-9)の各項は全微分の形であるので、積分ができて、さらに定常運動の条件を考慮すれば、式(2-10)として求めることができる。

$$\frac{q^2}{2g} + z + \frac{p}{\rho g} = H \quad (2-10)$$

ただし、 $q^2 = u^2 + v^2 + w^2$ (ここで q^2 は流線上の点の流線方向の流速の2乗となる)

このように式(2-2)、(2-3)に示したベルヌーイの定理は、完全流体を想定しており、粘性の影響による摩擦損失が無いので、エネルギーは保全されることになっている。運動のエネルギー、位置のエネルギー、圧力のエネルギーの総和は流線方向において、一定の値 (H) を維持することになる。

1.3 ニュートン流体におけるエネルギー損失の表示

一方、粘性の働くニュートン流体を想定する運動に対しては、ナビエ=ストークスの運動方程式をベースとして、層流条件においては粘性応力による摩擦損失を考え、乱流条件においては、固体壁近傍に形成される粘性の効果の大きな領域 (粘性低層)、レイノズル応力に相当する流速変動の中にエネルギー損失を考えることが必要となる。このようなエネルギー損失は、運動のエネルギーを熱エネルギーとして消散することになり、熱エネルギーに変化したエネルギーは機械的なエネルギーに戻ることはなく、機械的なエネルギーは失われていくことになり、損失エネルギーと呼ばれる。このようなエネルギー損失を組み込んだベルヌーイの関係式は1次元の管路におけるエネルギー収支を示す関係として式(2-3)、式(2-10)に準じて式(2-11)のように表すことができる。

・粘性流体における拡張されたベルヌーイの定理：
$$\frac{d}{dx} \left(\frac{v^2}{2g} + z + \frac{p}{\rho g} \right) = -\frac{dh_l}{dx} \quad (2-11)$$

但し、 v ：断面平均流速、

h_l ：流れ方向の流下距離に比例する損失エネルギーであり、流下距離を1とすると
き、式(2-12)として表記され。 dh_l/dx はエネルギー勾配となる。

$$h_l = f \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} \quad (2-12)$$

ただし、 d ：管の直径

f ：摩擦損失係数

l ：流下距離

流れ方向への一様な円形管路を想定するとき、管路のどこでエネルギー損失が生じるかは、難しい問題である。完全流体ではエネルギーの損失は生じることはなく、ニュートン流体（粘性流体）の場合には粘性の効果で熱エネルギーに転換することにより機械的なトータルエネルギーの損失が生じる。機械的エネルギーは、運動のエネルギー、位置のエネルギーと圧力のエネルギーの和となるが、断面が一様な管路においては、流れ方向への流速変動はないので、速度にかかわる運動のエネルギーの変化はせず、位置のエネルギーか圧力のエネルギーの変化として表示される。さらに水平な管路系を考えれば、位置のエネルギーも一定になるので、エネルギーの損失分は図 2-2 に示されるように圧力のエネルギー変化として表される。

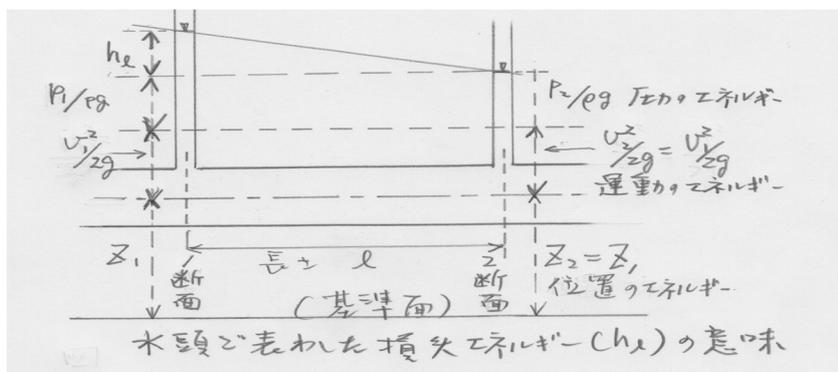


図 2-2 水平に置かれた一様断面の管路系における損失エネルギーの表示

しかし式(2-12)に示した関係は、損失エネルギーを運動のエネルギーの関数として表したものともいえるが、エネルギー損失は流れる流体と固体壁との間の摩擦損失（粘性による損失）であるので、運動のエネルギーとの関係で評価されることは、適切な表現方法となる。従って、摩擦損失係数 f は管路表面に作用する壁面剪断応力 (τ_0) を定める流れの条件（層流か乱流か）、管路表面の状態（滑らかな表面か粗い表面か）によって異なる表示を取るようになる。摩擦損失水頭、壁面剪断応力、の関係は式(2-13-1)、(2-13-2)として示される。

$$\tau_0 = \rho g R \frac{hl}{l} \quad (2-13-1)$$

$$h_1 = \frac{l}{\rho g} \frac{1}{R} \tau_0 \quad (2-13-2)$$

- ・管路の乱流に対する摩擦損失係数： $f = 0.3164Re^{-1/4}$ （ブラシウスの実験式（ $Re < 10^5$ ））
- ・管路の乱流における摩擦損失係数は管壁の滑らかさ（粗さ）、流速分布の仮定、によっても影響される。ここでは、 f を求める具体的な関係式については省略するが、水理学の教科書を参考にされたい。（例えば、林泰造「基礎水理学」鹿島出版（1996））

このように、管路におけるエネルギー損失は、原理的には流れの中に形成される速度勾配に比例する粘性によるエネルギー消散に起因するが、乱流の条件においては、平均流の速度勾配は固体壁付近の粘性底層において最も大きくなり、管路中心付近では平均流の速度勾配は乱流渦の影響により次第に小さくなり、エネルギー消散は相対的に小さくなる。しかし、遅い速度と早い速度の混合の過程ではレイノズル応力として評価される剪断応力の効果により、当然にエネルギー消散は生じることになる。このような乱流中でのエネルギー消散は管壁からの距離（ y ）の関数として、ロッター（J.C.ロッター著（大路通雄訳）「乱流」（岩波書店、1975、p.146））によって、式(2-14)のように表される。 y を管中心付近まで拡張して評価すれば、式(2-15)として求められる。

$$\varepsilon = U_*^3 / \kappa y \quad (2-14) \quad (\kappa : \text{カルマン定数 (0.4 とされる)}, y : \text{壁からの距離})$$

$$\varepsilon_0 = 2 U_*^3 / \kappa d \quad (2-15) \quad (\varepsilon_0 : \text{円形管内中心線付近でのエネルギー消散 (以下においては円形管路でのエネルギー消散の代表値として扱う)}, d : \text{円形管の直径})$$

ただし、 $U_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$ （ U_* ：摩擦速度）とする。

以上のように拡張されたベルヌーイの定理に基づく管路でのエネルギー損失の表示は、水理学の教科書においては標準的な表示となるが、攪拌槽の中の混合に伴う流れの状態を表現するためには必ずしも適切ではない。それは、流線の存在を仮定しやすい管路の流れや開水路の流れと攪拌槽の中の流れは現象が異なるからである。しかし、粘性流体（ニュートン流体）の運動により攪拌され物質は混合し、分散化されたり、集塊したりすることになっている。従って流体の運動を扱う基本原理は、流体力学の基本から外れるものではなく、粘性流体の運動方程式である、ナビエ＝ストークスの運動方程式を基本とし、攪拌によるエネルギーの投入と攪拌槽の中でのエネルギー消散の関係を考えることが必要となる。

水処理のプロセスの中では、攪拌が必要な反応槽は浄水プロセスの中での凝集剤の混合と凝集フロックの形成過程や下水等の生物処理装置での酸素の供給と活性汚泥等の微生物と下水の接触を保つための混合が必要となる。この混合の強さを定量的に評価する方法について理論的な説明を加えることにする。この方法は、【参考1】において示したようなオイラーの運動方程式に代わって、ナビエ＝ストークスの運動方程式をベースとしてエネルギー消散を推定する関係式を求めるものである。そのプロセスは、次の【参考2】のプロセ

スとして示される。

1.4 ナビエ=ストークスの運動方程式から求めるエネルギー損失の表示

ニュートン流体（粘性流体）を対象とする流れの運動の解析においては、粘性応力に伴う摩擦損失（熱として消散してしまう損失）の大きさを評価することが求められる。すでに式(2-11)、(2-12)に示したように、管路におけるエネルギーの損失分は h_l として評価される。ここでは、ナビエ=ストークスの運動方程式から求められるエネルギー損失分の評価方法を確認して、攪拌槽などでのエネルギー損失あるいは攪拌の強度の表示方法を解説する。その主要な算出プロセスは次の【参考2】として示される。

【参考2】ナビエ=ストークスの運動方程式からのエネルギー関係式の誘導

ナビエ=ストークスの運動方程式における粘性応力に示される、エネルギー消散は次の資料のように説明される。

(236)
5. 相似法則と Reynolds 数 (237)

4. 粘性によるエネルギーの消散

粘性による応力が現われるとそれに伴って流体の持つ機械的エネルギーは次第に消散する。次にこの大きさを求めて見よう。

4.1 図のように dx, dy で囲まれた微小矩形 $ABCD$ 内の流体の部分を考える。

4.1 図

邊 AD の面にはたらく應力 σ_x による力 $\sigma_x dy$ に打勝つて速度 u で進むためにこの部分の流体が単位時間になした仕事は $\sigma_x u dy$ である。又 BC の面を通してなされた仕事は

$$\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx\right) \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx\right) dy = \sigma_x u dy + \frac{\partial(\sigma_x u)}{\partial x} dx dy,$$

よつて差引き外部より

$$\frac{\partial(\sigma_x u)}{\partial x} dx dy.$$

の仕事を受けたこととなる。

AB の面、 CD の面に沿うてはたらく剪断応力についても全く同様で

$$\frac{\partial(\tau_{xy})}{\partial y} dx dy,$$

となる。

y 軸方向についても考えると、この流体の部分に単位時間になされた仕事は

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x} (\sigma_x u + \tau_{xy} v) + \frac{\partial}{\partial y} (\sigma_y v + \tau_{xy} u) \right\} dx dy, \quad (4.1)$$

である。

しかるに式(3.1)により

$$\mu \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - X \right) = \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right), \quad (★)$$

であるから $\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) u dx dy$ はこの微小部分の流体の運動のエネルギーを増し、又外力に打勝つために単位時間に費された仕事である。 $\left(\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \right) v dx dy$ についても同様であつて(4.1)の値よりこれを差引いた残り

$$\left(\sigma_x \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{xy} \frac{\partial u}{\partial y} + \tau_{xy} \frac{\partial v}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy, \quad (4.2)$$

が $ABCD$ の部分の流体を變形するための仕事として費されたのである。従つて単位時間について(4.2)で與えられる機械的エネルギーが粘性のため消散し、このエネルギーは熱に變る。

(4.2)の値を $dx dy$ で割り、これに式(2.14)を入れると

$$\mu \left\{ 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right\}, \quad (4.3)$$

となる。これが単位体積の流体から単位時間に消散する機械的エネルギーを與える。

三次元流の場合には x, y, z 軸方向の分速度をそれぞれ u, v, w 、とすると

$$\mu \left\{ 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right\}, \quad (★★)$$

となる。

上記資料の中に表記される、式(2-14)、(3-1)は下記のように示される。

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \sigma_y &= -p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \tau_{xy} &= \tau_{yx} \\ &= \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = X + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}, \quad (3.1)$$

の関係が成立つ。同様に y 軸方向については

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = Y + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \quad (3.2)$$

【資料1】(藤本武助「流体力学」養賢堂、昭和37年)のp.236、237及び232、234の一

部をコピーしている。

上に参照した【資料 1】では、ニュートン流体におけるナビエ=ストークスの運動方程式を求める過程に戻り、微小直方体（2次元化している）が各面に作用する垂直応力と剪断応力に抗して流速(u,v)で進むときにこの微小部分が単位時間になした仕事の中で、この微小部分の加速に使われた以外のエネルギーが摩擦による熱エネルギーへの転換分となるとして、摩擦損失エネルギーとして評価される。

資料 1 における説明について若干の解説をすれば、式(4.1)は 4.1 図の微小部分が流体の運動からなされた全仕事量を示しているが、そのうち星印を付けた関係からは、右辺の項は左辺の加速度項分を示しているので、加速度として運動エネルギーとして残ることになり、エネルギー損失からは除かなければならない。式(4.1)から星印の式の右辺にかかわる仕事量を引いた残りが、粘性応力による実質の摩擦損失として評価されることにより、式(4.2)がその実質の摩擦損失に相当することになる。式(4.2)に式(2.14)を代入すれば、式(4.3)が得られる。この関係を 3次元に拡張すると、p.237 の最後に星印 2つを付けた関係式が求められる。実質の単位質量当たりの摩擦損失を ε と表わすなら、 ε は式(2-16)として微小流体の内部に形成される速度勾配に起因するエネルギー消散として説明されることになる。

$$\varepsilon = \mu \left\{ 2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \right\}$$

(2-16) (式中 ()² は () の 2 乗を意味している)

ここで、注意しなければならない点は、1.3 節で求めた管路等における式(2-12)に示したエネルギー損失の表示と式(2-16)に示したエネルギー損失の関係にある。管路等におけるエネルギー損失は、主として固体壁となる管路の表面付近において最大のエネルギー損失が生じる現象を想定しているが、式(2-16)に示されるエネルギー損失は空間的な広がりのある大きな領域でのエネルギー損失を評価していることになる。しかし、管壁から生じたエネルギー損失は、管路全体でのエネルギー損失として評価され、攪拌槽等におけるエネルギー損失も攪拌容器の壁面及び攪拌装置のパドルの翼面に生じる速度勾配が、最終的には攪拌槽全体でのエネルギー損失となるので、攪拌の場における平均的なエネルギー損失は局所的な速度勾配の装置全体での平均的（代表的）な速度勾配となる。いかに適切に平均的なエネルギー消散を定量的に求めるかが課題である。

1.5 水処理装置における攪拌強度の評価指標としての G 値の意味

式(2-13)はニュートン流体の管路等における運動に伴う熱エネルギーへの転換分を示しており、その転換分は基本的に流体運動の中に生じる速度勾配に起因することを示している。このように考えると、管路の中の流れも、攪拌槽の中の流れも、基本的には局所的な速度勾配がエネルギー消散の原因であり、消散されたエネルギーは流れの場における平均的

な速度勾配の関数として評価されることが分かる。

水処理プロセスの中に現われる攪拌混合のプロセスには各種の攪拌装置が考案されている。もちろん用途や目的にもよるが混合の強度は、消散されるエネルギーをベースとした総合的な速度勾配として評価することが適切な方法となる。この総合的な速度勾配は式(2-17)として評価され、水処理分野ではG値と呼ばれることになる。

$$G = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} = dU/dy \quad (2-17)$$

ここで、G：G値、総合的な速度勾配（dU/dy：総合的な速度勾配）

ε ：装置内で単位体積あたりに消散されるエネルギー

$\varepsilon = P/V$ （ただし、P：攪拌に必要な動力、V：攪拌槽の容積）

また、攪拌時間との積として攪拌混合の条件をコントロールする指標として、G・t値が使われる。

$G \cdot t = G \times t$ （t：攪拌時間あるいは攪拌槽内の滞留時間）

なお、攪拌に必要な動力の大きさは、攪拌装置の機械的なエネルギー特性にも依存するので、攪拌槽の中での現実の流動状態と消費される電力量との関係は総合的な装置特性に依存する。式(2-17)として求めたG値は【参考2】に示した理論的な背景を持つが、攪拌槽に投入される全電力消費として現れるPの値は、攪拌パドルの形状、攪拌槽の形状など個別装置で異なることになり、いわゆる省エネ性能等を比較する場合には基準値の取り方など課題が多いことになる。

このとき、凝集フロックに働く粘性応力に相当する応力は式(2-18)のように示される。

$$\tau = \mu \times G \quad (2-18)$$

ただし、粘性応力が文字通りの粘性の働きを表しているのは流れの場が層流の場合であって、乱流の場合には、G値として評価されるエネルギー消散には、遅い速度と早い速度の間の運動量の交換に起因するレイノルズ応力として評価される剪断応力の効果も加味されたものとなる。従って、攪拌槽の内部でのG値は総合的な性格を持つ特性値となる。

2. フロックに作用する力の評価と強度の推定

2.1 フロック強度推定の理論的背景

フロックに作用する力の推定については、すでに『IV 水理学の基礎としてのナビエ＝ストークスの運動方程式の誘導とフロック状粒子に作用する力の解析（流体力学・水理学の基礎（I）後半（2020.12.20））』において示してきたところである。それは、微小流体に働く力を評価し、定量的に求める方法であった。本稿においては、前節において説明した損失エネルギーと速度勾配の関係及び速度勾配と粘性応力との関係を前提として、流体の流動条件がフロックに作用する具体的な応力（フロックの示す強度）についての実験結果を解説する。この実験においては、円形管の中での流れによるフロックの破壊過程を実験的に調べることで、フロック強度を推定した結果である。

なお、実験の内容、結果については著者等がアメリカ土木学会（ASCE）論文集に発表した内容を紹介するものである。図、表が英語になっているのはそのためである。ここに紹介するフロック強度を定量的に求める方法は、円形管路の内部に発生する乱流状態を想定し、その乱流中において、フロックの破壊が生じることを想定して、円形管路の流れの中で破壊され残ったフロック径を測定し、そのフロックの強度を推定するものとなっている。

具体的には、式(2-15)によって ε_0 を求め、すでに『IV 水理学の基礎（以下略）』において示した関係式から、フロックに働く強度を求めている。また、フロック強度を求める方法として提起されている Parker 等の理論（「Floc Breakup in Turbulent Flocculation Processes」

Parker, D.S., Kaufman, W.J., Jenkins, D., pp.79-99, SA1 ASCE, 1972）との比較を行い、フロック強度とフロックの沈降速度の現実性を評価しているものである。

2.2 Parker 等の理論の簡単な紹介

Parker 等は、下に引用する論文の式(1)に示す固形粒子と流体の密度が異なる場合に現われる粒子と流体の相対的な関係を求め、粒子に働く摩擦応力を求めている。この方法の優れた特徴は、流体中での粒子と流体の相対的な速度差を直接求めているところにある。しかし、問題は粒子の密度と流体の密度の差が小さくなっていくときには、相対的な速度が小さくなってしまふ点にある。

粒子と流体の違いがどのような内容を持つのかにより、その影響が異なることが想定され、著者は密度とともに変形の仕方の差による効果の定量化について検討してきた。その結果は、「IV 水理学の基礎（以下略）」の後半において土木学会論文集に発表した論文において、固形物と流体の差を変形の仕方の差として認識する方法を提案している。

本節においては、Parker 等の密度差に起因する応力（ τ_y' ）と変形の仕方に起因する応力（ τ_y ）との比較と、フロック粒子への適合性をフロック粒子に想定される沈降速度の大きさで評価する関係を示すことにする。フロック密度を 1.1mg/cm^3 とする範囲においては、著者の主張する変形の仕方の差に起因する相対的な関係の方が適切な沈降速度を与える関係となる。

以下においては、そのような実験結果について解説していく。実験のポイントは、①円形管内の流速をホットフィルム流速計で直接測定し、乱流強度と流速分布を確認していること、②フロック径を直接測定していること、③フロックに作用する力の大きさを直接求め、強度を推定するアプローチをしていること、④強度のオーダーはフロックの沈降速度から推定される強度を説明する精度を持つこと、の4点にある。フロックの強度を直接論ずる方法を示すことが可能となってことを示している。

また、下記に引用する論文は著者等が ASCE に発表した論文から引用している。今回の論旨に必要な部分を引用しているため、全体については、本論文を参照されたい。

Evaluation of Forces Based on Difference of Density

Model of Parker, Kaufman, and Jenkins.—Parker, Kaufman and Jenkins (14)

investigated forces caused by the relative motion of a particle in its surrounding water. They modified and extended Techen's description of particle motion (19) and developed a relationship between the relative velocity of fluid with respect to particle. The fundamental relationship is presented in Eq. 1 under the basic assumption that the particle is small compared with the smallest wavelength present in the turbulence

$$\rho_p V \frac{du_p}{dt} = k_f \rho S v^2 + \rho V \frac{du_\lambda}{dt} + \frac{1}{2} \rho V \left(\frac{du_\lambda}{dt} - \frac{du_p}{dt} \right) + Fe \dots \dots \dots (1)$$

in which ρ_p = particle density; ρ = fluid density; S = particle cross-sectional area; V = particle volume; u_p = particle velocity; u_λ = fluid velocity in region of particle, i.e., eddy velocity of scale λ ; $v = u_\lambda - u_p$, relative velocity of fluid with respect to particle; k_f = turbulent friction factor; and Fe = external force.

The first term on the right side of Eq. 1 is the fluid drag resistance, the second term is equivalent to the buoyant force, the third term is the force required to accelerate apparent mass, and the last term is the gravity force.

Using some simplifications introduced by Levich (12), they obtained the relative velocity of fluid with respect to particle (Eq. 2):

$$v = \frac{[(\rho_p - \rho) V]^{1/2} u_\lambda}{\left[\left(\rho_p + \frac{1}{2} \rho \right) V + k_f \rho S \lambda \right]^{1/2}} \dots \dots \dots (2)$$

in which λ = length corresponding to particle diameter.

Because these relationships are described with a Lagrangian coordinate system based on the movement of a particle, they are very convenient for evaluating the effects of density differences.

Formulas to Evaluate Forces Caused by Difference in Density.—The following formulas were developed by Parker, et al. (14) for the fluid motion of homogeneous and isotropic turbulence.

For the viscous subrange:

$$\tau'_{y1} = 12\mu \frac{v_d}{d} = \frac{12}{18} (\rho_p - \rho) u_d^2 \dots \dots \dots (3)$$

in which $v_d = \left\{ (\rho_p - \rho) / 18\mu \right\} d u_d^2$ = relative velocity; μ = viscosity coefficient; d = diameter of particle; $u_d = \sqrt{\delta} \sqrt{(\epsilon/\nu)} d$ = eddy velocity of scale d ; ϵ = turbulent energy dissipation; ν = kinematic viscosity coefficient; δ = constant coefficient; and τ'_{y1} = surface shear stress corresponding to the viscous effects evaluated by difference of density. And, for the inertial convective subrange:

$$\tau'_{y2} = k_f \rho \frac{v_{max}^2}{d} \doteq k_f \rho \left[\frac{P}{\sqrt{3}} u_{\lambda u_{max}} \right]^2, \dots \dots \dots (4)$$

in which v_{max} = the peak relative velocity; $u_{\lambda u_{max}} = \sqrt{\beta} (2d\epsilon)^{1/3}$ = eddy velocity corresponding to the peak relative velocity; d = diameter of particle; ϵ = turbulent energy dissipation; β = constant coefficient;

and
$$P = \left[\frac{\rho_p - \rho}{\rho_p + \frac{\rho}{2}} \right]^{1/2}$$

τ'_{y2} = surface shear stress corresponding to the inertial effects evaluated by difference of density.

If we rewrite k_f in terms of the usual friction coefficient $C_D = f(R_p)$, k_f should be equal to $(1/2)C_D$ and should be evaluated as a function of particle Reynolds number determined by Eq. 5:

$$R_p = \frac{d v_d}{\nu} \quad \text{or} \quad R_p = \frac{d v_{\max}}{\nu} \dots \dots \dots (5)$$

An empirical relationship between R_p and C_D can be expressed by Eq. 6

$$C_D = \frac{K}{(R_p)^n} \dots \dots \dots (6)$$

For the various ranges of R_p , the values of K and n are as follows: Newtonian Range ($R_p > 10^3$, then $K = 0.4$ and $n = 0$), Allen Range ($10^3 > R_p > 1$, then $K = 12.65$ and $n = 0.5$), and Stokes Range ($R_p < 1$, then $K = 24$ and $n = 1$). These results suggest that Eqs. 3 and 4 can be expressed in an unified formula (Eq. 7) with the R_p as a controlling parameter.

$$\tau'_y = \frac{1}{2} C_D \rho v^2 \dots \dots \dots (7)$$

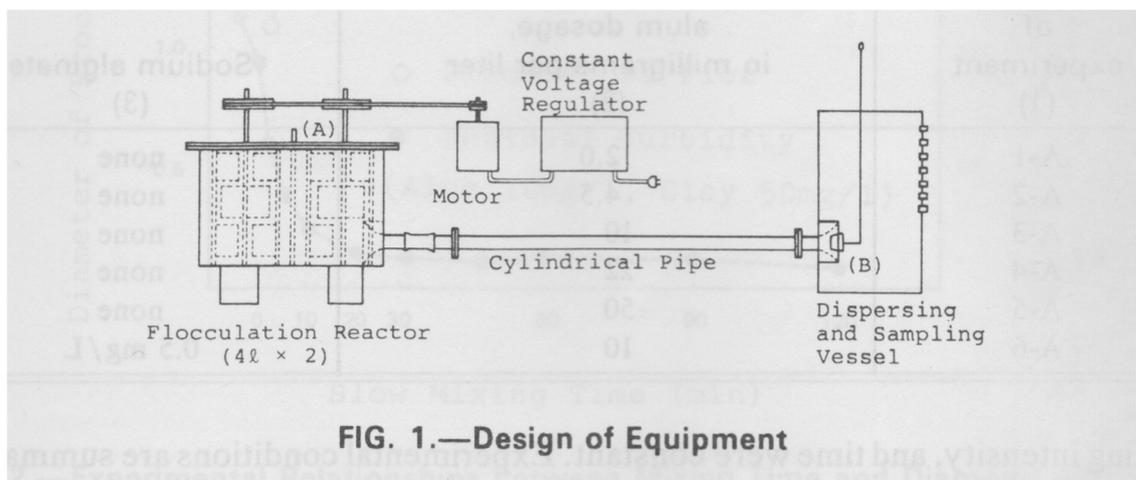
Inapplicability of Eqs. 3 and 4 for Evaluating Surface Stresses Acting on Almost Neutrally Buoyant Particles.—We can demonstrate from qualitative analyses the insufficiency of Eqs. 3 and 4 for evaluating the forces acting on an almost neutrally buoyant particle. If ρ_p approaches ρ , the values of τ'_y should approach to a value corresponding to $(\rho_p - \rho)^2$ or $(\rho_p - \rho)$ and eventually zero under the assumed flow condition. Thus it would seem necessary to develop a method to evaluate the forces which act on an almost or completely neutrally buoyant particle.

2.3 実験の紹介

2.3.1 実験装置の概要

フロック強度を実験的に求めるために、FIG. 1 のような管路系からなる装置を考えて、管路の中の流れによる力を受けて、フロックがその強度にしたがって残存するフロック径が決まると仮定している。管路系にかかわる損失水頭から求めた管路内において流体から

働く力を推定し、フロック径の大きさを測定することで、フロックの強度を推定しようとする実験である。管路の直径は 1.10cm、長さは 122.5cm である。



2.3.2 実験条件の概要（凝集剤の量の影響と補助剤の添加条件）

フロック形成条件（フロック強度）の変化を確認するために凝集剤の添加量と補助剤の効果を検討するために、次表に示す条件を設定している。

TABLE 5.—Conditions of Experiments

Number of experiment (1)	Amounts of alum dosage, in milligrams per liter (2)	Sodium alginate (3)
A-1	2.0	none
A-2	4.5	none
A-3	10	none
A-4	22	none
A-5	50	none
A-6	10	0.5 mg/L

なお、凝集反応槽での攪拌条件はすべての実験条件で同一としている。

2.3.3 Parker 等の方法と著者等の方法の比較

すでに引用している ASCE 論文に示される式 (3) (Parker 等の想定するフロック強度の推定式) と著者等が提案するフロックの強度式 (下記引用資料中の式(23)) から求められるフロック強度は、下記 TABLE 15 に示されるように求められる。Parker 等の式においては、粒子の密度を推定する必要があるが、ここでは、極端な値にはなっているが、 $\rho = 1.1$ または 2.0g/cm^3 を想定して求めている。これは、フロックの強度を大きめに見積もることとなることは注意しなければならない。

一方著者等の方法は、すでに前稿「IV」において示した、変形の仕方の差に基づく相対的

な運動を考えたフロックへ働く応力を評価する方法となる。ここでは、一様等方性の乱流条件下でかつ粘性領域として扱える領域を想定した、剪断応力を評価する式(23)によって定められる応力をフロックの強度として求めるものである。結果は、TABLE 15 に示される。

Formulas to Evaluate Forces Caused by Differences in Deformability.—To obtain formulas to evaluate the forces in terms of stress as expressed in Eqs. 3 and 4, we may divide the forces evaluated by Eqs. 18, 19, 20, 21, and 22 by d^2 . For homogeneous and isotropic turbulence:

$$R_p < (R_p)_c: \tau_{y1} = 2\mu \sqrt{\frac{2}{15}} \left(\frac{\epsilon}{\nu}\right)^{1/2} \dots \dots \dots (23)$$

$$R_p > (R_p)_c: \tau_{y2} = \rho \bar{v}^2(d) \dots \dots \dots (24)$$

For nonisotropic wall turbulence:

$$R_p < (R_p)_c: \tau_{y3} = 3\mu \sqrt{\frac{2}{15}} \left(\frac{\epsilon}{\nu}\right)^{1/2} \dots \dots \dots (25)$$

$$R_p > (R_p)_c: \tau_{y4} = 2\rho \bar{v}^2(d) \dots \dots \dots (26)$$

For laminar flow:

$$\tau_{y5} = \mu \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \dots \dots \dots (27)$$

It should be noted that although Eqs. 23 and 24 are analogous to those of Kolmogoroff (9) and Batchelor (2) the controlling parameter is R_p rather than scale of eddy or particle size.

1) Parker 等の方法と著者等の方法との比較結果例 (TABLE 15)

TABLE 15.—The Correction of Table 4

Diameter of floc, in centimeters (1)	$\bar{v}(d)$, in centimeters per second (2)	v_d , in centimeters per second		τ'_{y1} , in dynes per square centimeter		τ_{y1} , in dynes per square centimeter (7)
		$\rho_p = 2.0$ (3)	$\rho_p = 1.1$ (4)	$\rho_p = 2.0$ (5)	$\rho_p = 1.1$ (6)	
0.0333	0.365	0.0246	0.00246	0.0889	0.0089	0.219
0.0204	0.447	0.0226	0.00226	0.133	0.0133	0.438
0.0149	0.490	0.0199	0.00199	0.160	0.0160	0.657
0.0115	0.504	0.0162	0.00162	0.169	0.0169	0.876
0.0075	0.493	0.0101	0.00101	0.162	0.0162	1.34

なお、TABLE 15 に示されている結果は過去に Argaman 等が発表したフロック径と G 値の結果を参考にして求めているものである。同表(2)欄には著者等の求めた数値が、同じく(3)、(4)欄には Parker 等の方法による数値が示されている。結果としては、(5)、(6)欄と(7)

欄比べることになるが、(7)欄に示した著者等の求めた数値の方がはるかに大きな強度を示すものとなる。特に仮定されているフロック密度の大きさを考慮すれば、(6)欄の数値は現実ではないことは明らかである。次に、いずれの強度がより現実的であるかを確認するために、フロック強度が耐えうる沈降速度を求め、その速度のオーダーにより、より現実的に存在しうる強度となるかを比較することが検討すべき課題となる。また、凝集助剤としてアルギン酸の添加は強いフロック形成に効果が大きいことが明らかであり、沈降速度も大きくなっていることが分かる。

2) Parker 等の方法と著者等の方法によるフロック強度が耐えうる沈降速度の比較を TABLE 16 に示す。

TABLE 16.—The Assumed Settling Velocities Corresponding to Shearing Strength of Floccs

Experiment (1)	G value (1/S) (2)	Settling velocity from τ'_{y1} in Table 14, in centimeters per minute (3)	Settling velocity from τ_{y1} , in centimeters per minute (4)	Experiment (5)	G value (1/S) (6)	Settling velocity from τ'_{y1} in Table 14, in centimeters per minute (7)	Settling velocity from τ_{y1} , in centimeters per minute (8)
A-1	91	0.0242	2.89	A-2	93	0.0615	3.97
	120	0.0466	3.94		124	0.0569	4.26
	154	0.0462	4.28		155	0.0611	6.08
	186	0.0366	4.21		187	0.1096	6.08
	219	0.0482	4.88		221	0.0289	4.12
A-3	69	0.0365	3.02	A-4	98	0.0254	3.01
	121	0.0965	5.04		124	0.0235	3.17
	153	0.1463	6.25		157	0.0225	3.38
	182	0.1261	6.31		187	0.0206	3.48
	217	0.1911	7.69		222	0.0187	3.57
A-5	91	0.0270	2.99	A-6	88	1.24	10.6
	117	0.0246	3.16		120	1.33	12.1
	151	0.0134	2.81		152	0.924	11.5
	182	0.0174	3.26		184	1.62	14.9
	217	0.0082	2.69		219	1.05	13.6

結果としては TABLE 16 の(3)と(4)欄及び、(7)と(8)欄の比較を行うことになる。ここに示されるように、通常のフロック粒子の沈降速度に近いものは、(4)、(8)欄に示される沈降速度であり、その意味では、著者等の提示するフロック強度の求め方が妥当性を持つことが示される。

2.3.4 フロック強度の表示方法への提案

固体粒子が流体から受ける応力に対応できる個体粒子の強度は、基本的には粒子に働く応力によって評価される。ただし、個体粒子がさらに小さい粒子群によって構成される時には、その粒子の強度は、小さい粒子群が構成する粒子の外周領域に形成される一種のシェル

構造が強度を決定するメカニズムが想定される。このシェル構造はあたかも粒子の内部構造とは関係なく外側に形成される卵の殻のような存在として、個体粒子の強度を規定する構造となると考えることになる。このシェル構造の強度は、仮想される界面力となり、式(2-19)において、 S として評価されることになる。

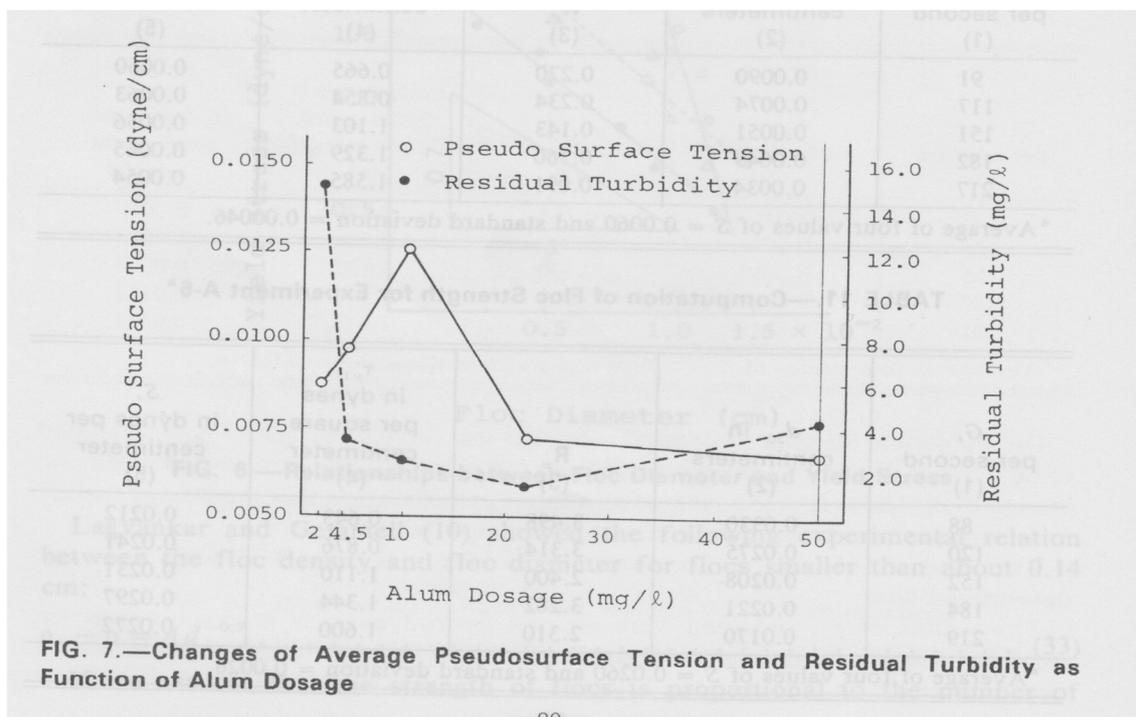
$$S = \tau_y d \quad (2-19)$$

S : フロックの仮想界面力 (dyne/cm)

τ_y : フロックの剪断応力 (dyne/cm²)

d : フロックの直径 (cm)

ここに求めたフロックの仮想界面力を凝集条件に対してプロットした結果は FIG. 7 に示される。この図の関係により、残留濁度の結果による適正凝集剤の添加量とフロック強度の強い凝集条件となる添加量は異なることが推定される。このことは、沈降分離に適している凝集条件と強度が強く濾過のプロセス等に対して耐久力を持つフロックの凝集条件は異なることを示すものであり、最適凝集条件を定める基準についての検討が改めて必要となることが指摘される。強度の強いフロックのためには相対的には凝集剤の量が少ない方がよい条件であることは注目されることである。



なお、参考のために、仮想界面力ではなくて凝集条件に対応する τ_y の値 (大きい値の4個の平均値) を記せば、凝集剤の少ない方からの順で、1.24、1.25、1.23、1.26、1.22 (dyne/cm) となっており、剪断応力で評価したフロック強度は凝集条件によらずほぼ等しい強度を示すものとなっている。凝集剤の効果がフロック強度に具体的にどのように影響を与えるものかは必ずしも明解ではないが、仮想界面力としての評価方法は十分意味のあるフロック強度の評価方法といえると考えられる。

3. 総括

本稿では、前稿「IV 水理学の基礎としてのナビエ＝ストークスの運動方程式の誘導とフロック状粒子に作用する力の解析（流体力学・水理学の基礎（I）（2020.12.20）」に引き続き、流体運動の記述におけるエネルギー損失の意味を再確認するとともに、そのエネルギー損失が、流体中に浮遊する粒子に作用する力を評価するものであることを示している。

そして、エネルギー損失は円形管路流や攪拌槽において局所的に形成される速度勾配の関数として評価されるものであり、式(2-17)のように G 値として定められることになる。このようにして G 値が定められるとき、フロック強度は本稿 p 14 に示される式(23)～(27)に示されるようにいくつかの流れの条件に対応して定められる。またその応力は仮想的な界面力として評価することにより、フロックの凝集効果等を評価する強度の指標として実用上の指標となるものであることがわかる。

なお、本稿 2 章は著者の ASCE への論文での主要な論点を紹介するものとなっている。細部については本論文を参照して頂きたいが、この論文には 2 名の研究者からの討議論文が出ており、これらの討議論文への回答を行う総括論文を発表している。この 2 つの討議論文に触発されて、総括論文では新しい発展もされている。本稿 TABLE 16 に示した沈降速度の検討は総括論文において示したものである。討議論文の著者の一人は、Parker 氏であり、討議のお陰でさらに進歩した議論ができたと感謝している。率直な議論は科学の進歩には不可欠なものであることを改めて確認するものである。

主要な参考文献、引用文献

- 1) 日野幹雄「明解水理学」(丸善、1983)
- 2) 藤本武助「流体力学」(養賢堂、1962)
- 3) 本間仁「水理学」(丸善、1967)
- 4) J.C. ロッタ (大路通雄訳)「乱流」(岩波書店、1975)
- 5) 林泰造「基礎水理学」(鹿島出版会、1996)
- 6) 四俵正俊「水理学」(技報堂、2019)
- 7) 小川浩平「流体移動解析」(朝倉書店、2011)
- 8) T. Matsuo & H. Unno, “Forces Acting on Floc and Strength of Floc” ASCE Vol. 107, No. EE3, pp.527-546, June, 1981
- 9) M. M. Clark, “Discussion to “Forces Acting on Floc and Strength of Floc”” ASCE, No. EE3, pp.592-594, June, 1982
- 10) D. S. Parker, “Discussion to “Forces Acting on Floc and Strength of Floc”” ASCE, No. EE3, pp.594-598, June, 1982
- 11) T. Matsuo & H. Unno, “Closure to “Forces Acting on Floc and Strength of Floc”” ASCE, Vol. 109, No.1, pp.257-263, February, 1983

- 12) Argaman, Y. & Kaufman, W. J. "Turbulence and Flocculation" J. of the Sanitary Engineering Division, ASCE, Vol. 96, No. SA2, Apr. 1970, pp. 223-241.